УДК 51(075.3)

Федорченко А.О., Рижкова Г.О., Кадубовський О.А.

[1] *здобувач магістерського РВО фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»*
e-mail: nastyaf201474@gmail.com, ORCID 0009-0004-1789-8803
[2] *вчитель математики, Слов'янський ЗЗСО І-ІІ ступенів №7*
e-mail: rijkowa@gmail.com, ORCID 0009-0003-6168-2770
[3] *кандидат фіз.-мат. н., доцент кафедри математики та інформатики, ДВНЗ «ДДПУ»*
e-mail: kadubovs@ukr.net, ORCID 0000-0003-2045-810X

ПРО ГЕОМЕТРИЧНІ МІСЦЯ ТОЧОК ПЛОЩИНИ ТА СУМІЖНІ ПИТАННЯ

Стаття присвячена методичним та дидактичним аспектам вивчення в шкільному курсі геометрії найпростіших геометричних місць точок та методу ГМТ для знаходження нових ГМТ і розв’язування геометричних задач. Наведено приклади можливого застосування зазначеного методу для доведення тверджень на встановлення властивостей геометричних фігур. Крім того, в статі наведено авторський підхід до вивчення ГМТ площини в межах відповідного змістового модуля певної освітньої компоненти освітніх програм підготовки здобувачів вищої освіти за предметною спеціальністю 014.04 Середня освіта (Математика) галузі знань 01 Освіта / Педагогіка.

Ключові слова: *геометричне місце точок, рівновіддаленість, метод ГМТ, застосування методу ГМТ, шкільний курс геометрії, навчання, підготовка вчителів.*

> «Поняття про геометричне місце точок – одне з найважливіших в геометрії. Воно відіграє роль не лише в таких питаннях, як геометричні задачі на побудову. Не менше значення воно має в аналітичній геометрії, де застосування цього питання дозволяє простим й доступним способом одержати наочне уявлення про різні криві»
>
> *Д.І. Перепьолкін.*

Вступ

Добре відомо, що геометричні місця точок (надалі – ГМТ) та метод геометричних місць точок (метод ГМТ) знаходять своє застосування у:

– ***механіці*** (для визначення траєкторій руху тіл та часток у механічних системах; аналізу динаміки механічних систем, зокрема визначення стабільних точок рівноваги; розрахунку довжин і кутів для рухомих деталей механізмів);

– ***оптиці*** (для аналізу властивостей світлових променів у лінзах, дзеркалах, призмах та інших оптичних системах; для визначення шляхів променів та їх поведінки у складних оптичних системах);

– ***електростатиці та магнетизмі*** (для визначення розподілу зарядів або магнітних полів у просторі; знаходження ліній електричного або магнітного поля, що спрощує аналіз цих явищ);

– ***електротехніці*** (для прокладання шляхів та керування рухом роботів, визначення місць розміщення заземлюючих електродів в електричній мережі;

визначення оптимального розташування антен та антенних систем; для розрахунків параметрів фільтрів, резонаторів та інших мікрохвильових пристроїв);
– ***квантовій механіці*** (для визначення допустимих енергетичних станів квантово-механічних систем; вивчення енергетичних рівнів атомів, молекул та інших квантових систем);
– **медицині** (для аналізу рухів людського тіла; статичних і динамічних позицій тіла під час діагностики і лікування захворювань; в плануванні хірургічних втручань; в техніці для визначення характеристик медичних пристроїв, при розробці медичних імплантатів тощо);
– **комп'ютерній графіці та анімації** (для моделювання тривимірних об'єктів; створення рухомих персонажів у комп'ютерних іграх та анімаціях, реалістичних та емоційно насичених візуальних ефектів тощо);
– **картографії** (для побудови карт географічних регіонів; визначення топографічних рис ґрунту; при вивченні розташувань об'єктів та їх зв'язків);
– **геодезії** (для визначення відстаней між географічними об'єктами; координат географічних об'єктів на поверхні Землі; при встановленні геодезичних параметрів, які дозволяють зрозуміти геометричну структуру планет);
– **архітектурі** (для визначення оптимальних розмірів та форм будівель; створення пропорційних композицій; визначення розташувань елементів будівлі, враховуючи їх функціональне призначення та стилістичні вимоги).

Геометричні місця точок широко використовуються у конструюванні геометричних фігур та поверхонь. Більше того, досить часто нові фігури у математиці визначають (вводять) саме як ГМТ, наприклад: коло – в шкільному курсі геометрії; еліпс, гіпербола і парабола – в курсі аналітичної геометрії. Так, наприклад:

коло – одна з найпоширеніших геометричних фігур, яка може бути описана як ГМТ площини, рівновіддалених від центра кола; властивості кола дозволяють нам з легкістю конструювати його, а також застосовувати в астрономії, географії та інженерії;

еліпс – це ГМТ на площині, сума відстаней від яких до двох фіксованих точок є сталою; їх застосовують в географії для моделювання траєкторій планет, в астрономії для опису орбіт комет, а також у медицині для моделювання руху пульсу в артеріях;

гіпербола – це ГМТ на площині, сума відстаней від яких до двох фіксованих точок має сталу різницю; гіперболи знаходять застосування в астрономії для моделювання галактик, а також в техніці для дослідження радіохвиль;

парабола – це ГМТ на площині, що рівновіддалені від фіксованої точки (фокусу) та фіксованої прямої (директриси); параболи широко застосовують у фізиці для моделювання траєкторій руху тіл, а також у техніці для побудови супутників;

сфера – це ГМТ в просторі, що рівновіддалені від центра сфери; сфери використовуються в геодезії для визначення відстаней між точками на Землі та у фізиці для моделювання гравітаційного поля;

циліндр – це ГМТ в просторі, що рівновіддалені від осі циліндра; циліндри застосовують в інженерії для побудови трубопроводів і баків та у геометрії для вивчення об'ємів та поверхонь обертання.

Отже, ГМТ є потужним інструментом, який знаходить своє застосування в багатьох галузях науки і техніки. Вони допомагають аналізувати і розуміти різноманітні геометричні структури (які оточують нас у повсякденному житті) та рухи об'єктів, що дозволяє розв'язувати різноманітні задачі практичного характеру. Застосування ГМТ допомагає знаходити розв'язки та приймати рішення у різних сферах людської діяльності, що робить їх невід'ємною частиною нашого життя. А знання про ГМТ є важливими не лише в математиці, а й для розвитку інженерних, наукових, медичних та багатьох інших дисциплін.

Загально визнано, що якість знань учнів тісно пов'язана з якістю їх самостійної розумової діяльності. Тому вкрай важливо навчити учнів визначати та виявляти нові для них властивості та ознаки геометричних об'єктів, робити на основі вивченого нові умовиводи, знаходити доведення теорем та розв'язувати задачі. У зв'язку з цим виникає необхідність формування в учнів не лише навичок логічних міркувань, а також навичок евристичного мислення. Цьому, як відомо, сприяють задачі на дослідження. Під задачами на дослідження слід розуміти такі задачі, при розв'язуванні яких учні мають можливість зробити посильне для них відкриття. В геометричних задачах на дослідження, зокрема на знаходження ГМТ, учні мають змогу виокремлювати властивості та ознаки геометричних об'єктів.

При знаходженні / виведенні рівнянь ліній (кривих) в аналітичній геометрії їх розглядають саме як ГМТ. А різноманітність прикладів ГМТ виникає в наслідок застосування методу координат. Якщо в просторі / на площині зафіксовано декартову систему координат, то кожне рівняння з трьома (2 або навіть 1) змінними визначає у просторі / на площині певну сукупність точок – ГМТ, координати яких задовольняють цьому рівнянню.

Таким чином задачі на знаходження ГМТ відіграють важливу роль в геометрії, зокрема шкільному курсі. «Вони дають змогу краще засвоїти геометричний матеріал, допомагають розвивати логічне мислення учнів, конструктивні здібності, сприяють формуванню графічних навичок» [7, С. 3].

Найбільш повно комплекс питань, пов'язаних із задачами на ГМТ, висвітлено у книзі [26], в якій автором крім методичних вказівок, наведено велику кількість задач на ГМТ (переважно) площини. Найбільшу кількість задач на ГМТ простору наведено у книзі [21], в якій автор наводить й загальні вказівки про способи їх розв'язання.

Серед статей, присвячених методичним аспектам вивчення ГМТ у шкільному курсі геометрії, слід виділити роботи [19], [20] та [28].

Серед посібників для учнів ЗЗСО – [3], [6]; серед посібників для студентів педагогічних ЗВО та вчителів математики – [1], [2], [5], [7], [22].

Не зважаючи на рясність навчально-методичної літератури та наявність цілої низки задач на ГМТ в діючих підручниках з геометрії (напр. [8–17]), слід констатувати, що вивчення ГМТ дається учням з труднощами. На підставі досвіду проведення учнівських математичних олімпіад, слід також відзначити, що навіть сильні учні мають проблеми із типовими задачами на знаходження ГМТ ([23, С. 33-34], [24, С. 32-33], [25, С. 78-80]). Можливо це пов'язано із необхідністю доведення прямого і оберненого тверджень під час їх знаходження, та нерозвиненістю навичок за допомогою рівнянь, нерівностей та/або їх систем задавати геометричні фігури і, навпаки, за властивостями фігур складати їх рівняння тощо. Не можна не погодитися із думкою автора [27, С. 3] про те, що задачі на відшукання ГМТ традиційно розглядаються виключно в контексті їх застосувань до розв'язання задач на побудову, тобто, виключно зі службовою метою. Цінність розв'язування задач на побудову, яким, нажаль, все менше приділяється уваги в шкільному курсі геометрії, не викликає жодних сумнівів; проте, як наголошується автором в [27], слід також розуміти, що і задачі на відшукання ГМТ самі по собі є задачами, які мають не менше освітнє та виховне значення.

Спробі систематизувати задачі-твердження про ГМТ площини та принципово уможливити рівномірне вивчення (шляхом запропонованих у статті способів їх доведення) задач на знаходження ГМТ площини у 7, 8 та 9 класах й присвячено дану статтю.

1. Основні поняття та попередні відомості

Якщо фігуру задано шляхом вказівки властивості, яку мають всі точки цієї фігури і лише фони, то таку фігуру називають *геометричним місцем точок* (ГМТ), що мають зазначену властивість. Тобто, ГМТ площини, що мають вказану властивість, називають фігуру (зазвичай – непорожню сукупність точок площини), яка складається з усіх тих і лише тих точок площини, які мають цю властивість. В дусі сучасної математики поняття ГМТ за своїм змістом не відрізняється від поняття множини точок.

Взагалі фігура може складатися з точок, які мають певну властивість, але не містити всіх точок площини з цією властивістю. Така фігура не є геометричним місцем точок. Отже, коли у визначенні певного ГМТ сказано, що фігура складається з усіх точок площини, які мають певну властивість, то це означає:

– по-перше, що кожна точка фігури має цю властивість;
– по-друге, кожна точка площини, яка має цю властивість, належить даній фігурі.

Властивість (або декілька властивостей), за допомогою якої характеризується те чи інше ГМТ, називають *характеристичною властивістю* точок цього ГМТ.

ГМТ може бути не лише лінією або сукупністю декількох ліній, воно може бути скінченною сукупністю точок, областю площини і т.ін. Може навіть виявитися, що ГМТ, які мають вказану властивість, зовсім не існує (порожня множина точок).

Зауваження 1. Під час знаходження ГМТ, яке визначається певною характеристичною властивістю, необхідно чітко усвідомлювати «універсальну» множину, на якій відбувається пошук. Так, наприклад, «*ГМТ, рівновіддалених від кінців даного відрізка* AB» на прямій, яка містить відрізок AB, шукане ГМТ є точкою (середина відрізка AB) – рис. 1 a); на площині, яка містить відрізок AB, – пряма (серединний перпендикуляр до відрізка AB) – рис. 1 b); у просторі – площина (яка проходить через середину відрізка AB перпендикулярно до нього) – рис. 1 c).

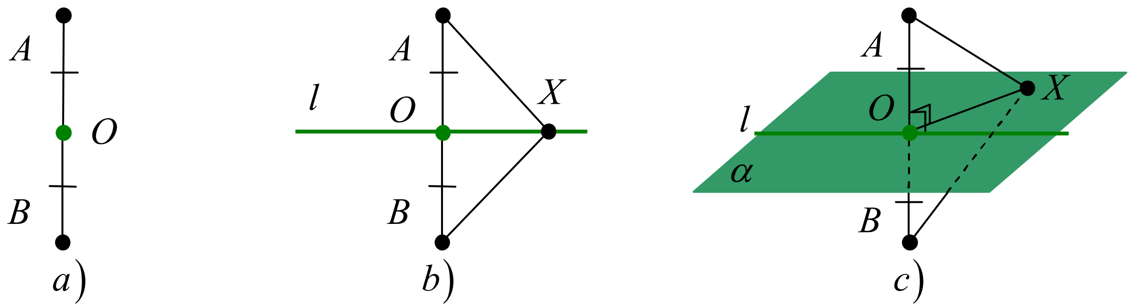


Рис. 1.: до ГМТ, рівновіддалених від двох даних точок.

Основним методом знаходження ГМТ є метод геометричних місць.

Зміст задач про знаходження геометричного місця точок, які мають певну / характеристичну властивість, полягає в тому, щоб вказати, яку саме елементарну фігуру являє собою шукане ГМТ.

Розв’язування задач на знаходження ГМТ (зазвичай) складається з ***аналізу***, ***доведення*** та ***дослідження***.

Мета **аналізу** – висунути гіпотезу відносно того, чим є шукане ГМТ.

Етап ***аналізу*** (зазвичай) починають з того, що на рисунку зображають дану фігуру та розглядають певну точку, яка (за припущенням) належить шуканому ГМТ. Далі встановлюють зв’язки цієї точки з даними елементами, що є наслідками саме з визначення даного / шуканого ГМТ, та які допомагають визначити його форму і розташування. Інколи аналізу допомагає розгляд певного частинного випадку або ж безпосередня побудова (визначення) декількох інших точок, які «гарантовано» належать шуканому ГМТ. Результатом аналізу є висунення гіпотези щодо форми та розташування шуканого ГМТ – *фігура* Φ.

На етапі ***доведення*** (зазвичай) встановлюють справедливість двох взаємно обернених тверджень:

Твердження I. Довільна точка, що належить знайденій (на етапі аналізу) фігурі Φ, має характеристичну властивість точок шуканого ГМТ;

Твердження II. Кожна точка, яка має характеристичну властивість точок шуканого ГМТ, належить фігурі Φ.

Корисно також пам'ятати, що доведення другого твердження можна замінити доведенням наступного

Твердження ІІ*. Якщо певна точка (площини / простору залежно від умови) не належить «знайденій» (на етапі аналізу) фігурі, то вона не має характеристич- ну/ні власти- ість/ості точок шуканого ГМТ.

Не варто забувати, що інколи, під час доведення висунута гіпотеза спростовується. І тому слід повернутися до більш детального аналізу та висунення нової гіпотези.

Етап ***дослідження*** полягає у вивченні різних випадків, які можуть вплинути на форму і розташування шуканого ГМТ, в залежності від даних (за умовою задачі) геометричних об'єктів та їх взаємного розташування.

На підставі рекомендацій, викладених в [29, С. 11], учням можна запропонувати **план до розв'язування задач на відшукання ГМТ**:

1) побудова низки окремих точок шуканого ГМТ на підставі умови;
2) побудова робочого ескізу, зручного для обґрунтування задачі;
3) обґрунтування розв'язання (встановлення закономірностей щодо розташування точок шуканого ГМТ);
4) уточнення виду фігури, знайденої у пункті 3);
5) дослідження розв'язку задачі в залежності від зміни вихідних даних;
6) знаходження найбільш зручного способу побудови знайденого ГМТ.

Зауваження 2. Слід розрізняти задачі *на знаходження ГМТ* та задачі *на побудову ГМТ*. Бо перша з них не передбачає другу, а друга, зазвичай, – передбачає першу. Крім того, іноді, знайдене ГМТ за допомогою заданого умовою задачі набору креслярських інструментів не може бути побудованим.

Аналіз дидактичного забезпечення теми «Геометричні місця точок площини» за підручниками з геометрії [8–17, 27] дозволяє виокремити найбільш типові та суттєво різні задачі, які в них пропонуються.

У 7 класі ([8], [11], [13], [15], [27]):

- ГМТ, рівновіддалених від кінців відрізка.
- Знайдіть ГМТ, рівновіддалених від усіх вершин трикутника.
- Знайдіть ГМ центрів кіл даного радіуса, які проходять через дану точку.
- Знайдіть ГМ центрів кіл, які проходять через дві дані точки.
- Знайдіть ГМТ, рівновіддалених від двох прямих, які перетинаються. (Якою фігурою є ГМ центрів кіл, що дотикаються до двох прямих, які перетинаються?)
- Знайдіть ГМ вершин рівнобедрених трикутників, які мають спільну основу.
- Знайдіть ГМТ, рівновіддалених від двох паралельних прямих. (Якою фігурою є ГМ центрів кіл, що дотикаються двох паралельних прямих?)
- Знайдіть ГМТ, віддалених від даної прямої на задану відстань.
- Відрізок AB – діаметр кола, M – довільна точка кола, яка не співпадає з жодною з точок A і B. Доведіть, що $\angle AMB = 90^0$.

- Дано точки A і B. Знайдіть ГМТ X таких, що $AX > BX$.
- Дано точки A і B. Знайдіть ГМТ X таких, що $AX > AB$.
- Знайдіть ГМТ, рівновіддалених від усіх сторін трикутника.
- Знайдіть ГМ центрів кіл, які дотикаються до даної прямої в даній на ній точці.
- Знайдіть ГМ центрів кіл, які дотикаються до обох сторін даного кута.
- Знайдіть ГМ центрів кіл радіуса R, які дотикаються до даної прямої.
- Якою фігурою є геометричне місце вершин трикутників, що мають спільну сторону AB і однакову висоту h, проведену до цієї сторони?
- Знайти геометричне місце вершин трикутників зі спільною основою AB та бічною стороною, довжина якої дорівнює a.
- Дано два рівних кола, що лежать одне поза одним. Знайти геометричне місце центрів кіл, які дотикаються до цих кіл.
- Дано кут ABC та дві точки M і N у його внутрішні області. На сторонах кута знайдіть точки, рівновіддалені від точок M і N. Скільки розв'язків має задача?
- Знайдіть ГМ центрів кіл радіуса R, які відтинають на даній прямій хорду даної довжини a.

У 8 класі ([9], [14], [16], [27])**:**

- Дано відрізок AB. Знайдіть ГМТ X таких, що трикутник AXB прямокутний.
- Знайдіть ГМ вершин прямих кутів, сторони яких проходять через дві дані точки.
- Дано відрізок AB і кут α. Знайдіть ГМТ X таких, що $\angle AXB = \alpha$.
- Знайдіть ГМ вершин паралелограмів зі спільною стороною, у яких площа дорівнює площі даного паралелограма.
- Доведіть, що ГМТ, сума квадратів відстаней від яких до двох даних точок стала, є колом з центром у середині відрізка з кінцями у цих точках.

У 9 класі ([10], [12], [17], [27])**:**

- Складіть рівняння ГМТ, віддалених на дану відстань від точки, заданої своїми координатами.
- Знайдіть ГМ початків (кінців) одиничних векторів, кінці (початки) яких містяться в даній точці.
- Складіть рівняння ГМТ, рівновіддалених від двох точок, заданих своїми координатами (Складіть рівняння ГМ центрів кіл, які проходять через дві точки, що задані своїми координатами).
- Знайдіть ГМ кінців колінеарних одиничних векторів, початки яких містяться на даній прямій.
- Складіть рівняння ГМ центрів кіл радіуса R, які відтинають на даній прямій хорду сталої довжини a ($a < 2R$).
- Дано дві точки A і B. Знайдіть ГМТ X таких, що $AB + BX = AB$.
- Дано точки A і B. Знайдіть ГМТ X таких, що $AB + BX = BX$.

- Дано точки A і B. Знайдіть ГМТ X таких, що $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BX}|=|\overrightarrow{AB}|$.
- Дано точки A і B. Знайдіть ГМТ X таких, що $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BX}|=|\overrightarrow{BX}|$.
- Точка A належить колу. Знайдіть геометричне місце точок, які є серединами хорд даного кола, одним із кінців яких є точка A.
- Відрізок AB – хорда даного кола, точка C – довільна точка цього кола. Знайдіть геометричне місце точок, які є точками перетину медіан трикутників ABC.
- Дано дві точки A і B та пряму l. Знайдіть геометричне місце точок, які є точками перетину медіан $\triangle ABC$, де C – довільна точка прямої l.
- Відстань між точками A і B дорівнює 4. Знайдіть геометричне місце точок M площини, для яких: 1) $MA^2+MB^2=24$; 2) $MA^2-MB^2=4$.
- Знайдіть ГМТ, модуль різниці квадратів відстаней від яких до двох даних точок A і B дорівнює a^2, де a – довжина даного відрізка.
- Доведіть, що ГМТ, відношення відстаней від яких до двох даних точок стале (не дорівнює одиниці), є коло.

Звісно, що крім наведених, авторами підручників пропонуються й інші ГМТП, які, зазвичай, подано як задачі з числовими даними.

Слід також зауважити, що задачу на знаходження ГМТ, які мають певну властивість, можна подати / сформулювати у два способи:

1) у формі теореми, де відповідь на поставлене питання вже надана повністю або частково та потребує зробити лише відповідні обґрунтування;
2) у формі задачі, де за певними вихідними даними треба знайти ГМТ, які мають вказану властивість, не знаючи заздалегідь відповіді. В цьому випадку необхідно знайти саму фігуру (яка є шуканим ГМТ) з усіма відповідними обґрунтуваннями розв’язання.

Не можна не погодитися з автором [29, С. 6], що формулювання задач на знаходження ГМТ у перший спосіб, де вид / форма фігури – шуканого ГМТ (повністю або частково) зазначена в умові, значно знижує цінність досліджень при доведенні. Тоді як невідомість фігури (при формулюванні у другий спосіб) потребує від учня більшої відповідальності під час обґрунтування своїх висновків; бо необхідно здійснити ретельну перевірку всіх своїх міркувань, перш ніж зробити остаточний умовивід-вердикт.

З урахуванням зазначеного, формулювання задач у другий спосіб слід вважати найбільш доцільним. *Проте, на переконання авторів, задачі, сформульовані у перший спосіб, більш ніж доцільно використовувати як засіб досягнення мети – навчити розв’язувати задачі, сформульовані у другий спосіб (перш ніж навчитися знаходити добуток чисел, ми все ж таки вивчили-«визубрили» табличку множення) А для реалізації зазначеного, зокрема успішного застосування методу ГМТ, велике значення має знання «основних» ГМТ як основа для навичок відшукання ГМТ за певними умовами. Саме цим питанням й присвячено наступну частину представленої статті.*

2. Основна частина

Нижче наведено авторський підхід до вивчення ГМТ площини, який протягом декількох років було апробовано на фізико-математичному факультету ДВНЗ «Донбаський державний педагогічний університет» в межах вивчення відповідних змістових модулів освітніх компонент «Елементарна геометрія» та «Вибрані питання математики» освітніх програм підготовки здобувачів вищої освіти за предметною спеціальністю 014.04 Середня освіта (Математика) галузі знань 01 Освіта / Педагогіка.

Вивчення ГМТ площини доцільно розпочати з певної низки базових задач, наприклад, наступних

Базова задача №1. Дано відрізок AB. Доведіть, що на прямій AB існує єдина точка X, яка є внутрішньою точкою відрізка AB та для якої виконується рівність $AX : XB = m : n$, де $m > 0$, $n > 0$.

Базова задача №2. Дано відрізок AB. Доведіть, що на прямій AB існує єдина точка X, яка є зовнішньою точкою для відрізка AB та для якої виконується рівність $AX : XB = m : n$, де $m > 0$, $n > 0$, $m \neq n$.

Для доведення зазначених вище базових задач необхідно показати існування та довести єдиність такої точки. Міркування можна провести у спосіб, аналогічний наведеним у роботах [4, С. 13], [24, С. 32-33].

Базова задача №3. Дано відрізок AB. Доведіть, що на прямій AB існує єдина точка X, для якої справджується рівність $XA^2 - XB^2 = a^2$, де $a > 0$.

Доведення. Нехай X та X' – такі точки на прямій AB, які задовольняють умови $XA^2 - XB^2 = a^2$ та $X'A^2 - X'B^2 = a^2$ відповідно. Тоді маємо рівність $XA^2 - XB^2 = X'A^2 - X'B^2$. Подамо останню у векторній формі $\overrightarrow{XA}^2 - \overrightarrow{XB}^2 = \overrightarrow{X'A}^2 - \overrightarrow{X'B}^2$. Тоді $\left(\overrightarrow{XA} - \overrightarrow{XB}\right)\left(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB}\right) = \left(\overrightarrow{X'A} - \overrightarrow{X'B}\right)\left(\overrightarrow{X'A} + \overrightarrow{X'B}\right)$, $\overrightarrow{BA} \cdot \left(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB}\right) = \overrightarrow{BA} \cdot \left(\overrightarrow{X'A} + \overrightarrow{X'B}\right)$, $\overrightarrow{BA} \cdot \left(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} - \overrightarrow{X'A} - \overrightarrow{X'B}\right) = 0$. Звідки $\overrightarrow{BA} \cdot \left(\overrightarrow{XX'} + \overrightarrow{XX'}\right) = 0$, $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{XX'} = 0$. Оскільки точки A і B є різними, а вектори $\overrightarrow{BA}$ і $\overrightarrow{XX'}$ не можуть бути перпендикулярними, то рівність $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{XX'} = 0$ можлива лише за умов, коли $\overrightarrow{XX'} = \vec{0} \Leftrightarrow X \equiv X'$. З останнього й випливає справедливість доводжуваного твердження.

Зауваження 3. Кожне з наведених нижче ГМТП (за винятком першого) є теоремою. Якщо стверджується, що «Геометричним місцем …, що мають властивості $f_1, f_2, ..., f_n$, є фігура F», то доведення цього твердження складається з двох (обов’язкових) частин (які можуть мінятися місцями):

1) доводиться, що кожна точка M фігури F має всі перелічені в умові властивості $f_1, f_2, ..., f_n$, тобто, належить шуканому ГМТП;
2) доводиться, що кожна точка N (основної) площини, яка має всі властивості $f_1, f_2, ..., f_n$, належить фігурі F.

Як правило: першу частину доводять шляхом безпосередньої перевірки;
другу частину – методом від супротивного.

Твердження 1 (ГМТП №1) *ГМТП, що знаходяться від даної точки* O *на даній відстані* $d>0$, *є (за визначенням) коло* $\omega(O,R)$ *з центром у даній точці* O *та радіусом* $R=d$ (рис. 2).

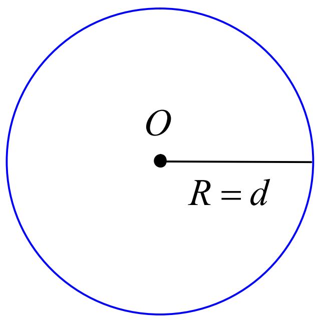


Рис. 2.: до ГМТП №1.

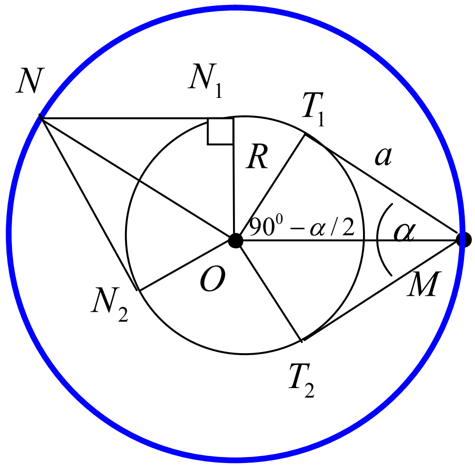


Рис. 3.: до ГМТП №2.

Наслідок 1.1. (ГМТП №2) *ГМТП, з яких дане коло* $\omega(O,R)$ *видно під даним нерозгорнутим кутом* α *(тобто, точки, з яких дотичні до даного кола утворюють між собою кут* α*), є коло концентричне даному, (яке проходить через одну з таких точок) радіус якого дорівнює* $R'=\dfrac{R}{\sin(\alpha/2)}$.

Доведення.

1) Нехай M – довільна (але фіксована) точка шуканого ГМТП, а MT_1 і MT_2 – відрізки дотичних до даного кола $\omega(O,R)$ (рис. 3). Тоді за умовою $\angle T_1MT_2=\alpha$. З рівності прямокутних трикутників MOT_1 і MOT_2 (наприклад, за катетом та спільною гіпотенузою) маємо що $\angle T_1OM=\angle T_2OM=90^\circ-\alpha/2$. Тому $OM\cdot\sin(\alpha/2)=R$. Звідки $OM=\dfrac{R}{\sin(\alpha/2)}=R'$ – стала величина.

Отже кожна точка M шуканого ГМТП відстоїть від даної точки O на фіксованій (сталій) відстані R', і тому належить колу $\omega(O,R')$.

2) Тепер покажемо, що довільна точка N кола $\omega(O,R')$ належить шуканому ГМТП. Отже, нехай $N\in\omega(O,R')$, а NN_1 і NN_2 ($N_1,N_2\in\omega(O,R)$) – дотичні до кола $\omega(O,R)$ в точках N_1 та N_2 відповідно. Оскільки $ON=R'$, $ON_1=ON_2=R$, то $\triangle NN_1O=\triangle NN_2O=\triangle MT_1O$ (за катетом і гіпотенузою). Тому $\angle ONN_1=\angle ONN_2=\angle OMT_1=\alpha/2$. Звідки $\angle N_1NN_2=\alpha$.

Наслідок 1.2. (ГМТП №3) *ГМТП, відрізки дотичних з яких до даного кола* $\omega(O,R)$ *дорівнюють довжині* a *даного відрізка, є коло концентричне даному, (яке проходить через одну з таких точок) радіус якого дорівнює* $R'=\sqrt{R^2+a^2}$.

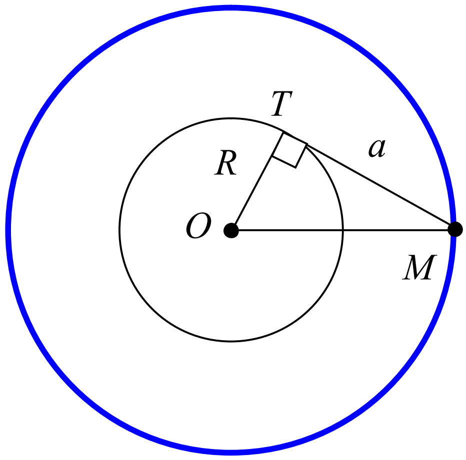


Рис. 4.: до ГМТП №3.

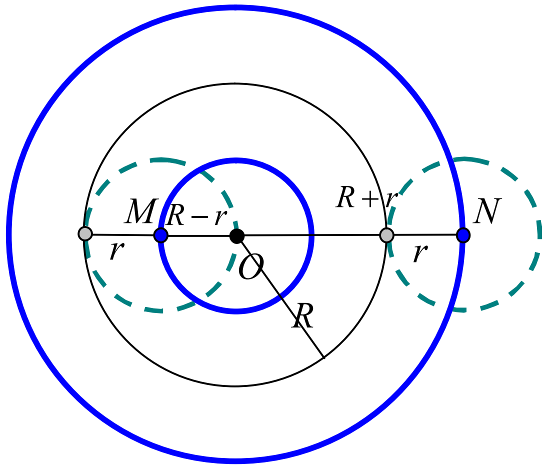


Рис. 5.: до ГМТП №4.

Доведення.

1) Нехай M – довільна (але фіксована) точка шуканого ГМТП, а MT – відрізок дотичної до даного кола $\omega(O,R)$. Тоді за умовою $MT = a$ (рис. 4).

З прямокутного трикутника MTO за теоремою Піфагора маємо, що $OM^2 = OT^2 + MT^2 = R^2 + a^2$. Звідки $OM = R'$ – стала величина.

Отже, довільна точка шуканого ГМТП відстоїть від даної точки O на сталій відстані $R' = \sqrt{R^2 + a^2}$, і тому належить колу $\omega(O,R')$.

2) Приналежність довільної точки кола $\omega(O,R')$ шуканому ГМТП доводиться аналогічно доведенню другої частини ГМТП 2.

Наслідок 1.3. (ГМТП №4) *ГМ центрів кіл даного радіусу r, які дотикаються до даного кола $\omega(O,R)$, складається з двох кіл, концентричних даному, радіуси яких дорівнюють сумі $(R + r)$ та різниці $(R - r)$ даних радіусів відповідно.*

Доведення пропонуємо читачам провести самостійно (рис. 5).

Для засвоєння зазначених вище ГМТП доцільно запропонувати наступну низку задач:

Задача 1.1. Знайти ГМ центрів кіл (площини) даного радіуса R, які проходять через дану точку Q.

Задача 1.2. Знайти ГМТП, відділених від даної точки O на відстань, не меншу за довжину m даного відрізка.

Задача 1.3. Знайти ГМТП, віддалених від даного кола $\omega(O,R)$ на відстань, що дорівнює даному відрізку a.

Задача 1.4. Знайти ГМ вершин трикутників із спільною основою AB та бічною стороною, що дорівнює довжині m даного відрізка.

Твердження 2 (ГМТП №5) *ГМТП, що знаходяться на даній відстані $h > 0$ від даної прямої l, складається з двох паралельних прямих l_1 та l_2, кожна з яких відстоїть (віддалена) від даної прямої l на даній відстані h.*

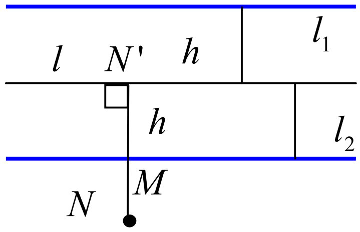


Рис. 6.: до ГМТП №5.

Доведення. Нехай $F = l_1 \bigcup l_2$, де l_1 і l_2 – прямі, що паралельні даній прямій l та які відстоять від неї на даній відстані h (рис. 6).

1) За припущенням $\rho(l, l_1) = \rho(l, l_2) = h$, тому для кожної точки M, що належить прямій l_1 (або l_2), маємо $\rho(F, M) = h$. Отже, кожна точка фігури F належить шуканому ГМТП.

2) Нехай N – довільна (але фіксована) точка шуканого ГМТП. Оскільки $h \neq 0$, то без втрати загальності можна вважати, що точка N належить тій півплощині відносно прямої l, якій належить пряма l_2. Припустимо, що $N \notin F$. Тоді $N \notin l_2$. Опустимо перпендикуляр NN' на пряму l, і нехай пряма NN' перетинає l_2 в точці M. Тоді: з одного боку $NN' = h$ (за припущенням), з іншого боку – $MN' = h$ (за першою частиною доведення). Таким чином на промені $[N'N)$ відкладено два різні відрізки $[N'N]$ та $[N'M]$ однакової довжини h, чого бути не може за аксіомою відкладання відрізків. Прийшли до протиріччя, і тому наше припущенням про те, що $N \notin F$ є неправильним. Отже, кожна точка шуканого ГМТП належить фігурі $F = l_1 \bigcup l_2$.

Наслідок 2.1. (ГМТП №5*) *Геометричним місцем вершин трикутників, що є рівновеликими до даного $\triangle ABC$ та мають з ним спільну основу AC, є дві прямі, що є паралельними до прямої AC та відстоять від неї на відстані, яка дорівнює довжині висоти BB' $\triangle ABC$.*

Зауваження 4. Перед вивченням ГМТП №5 доцільно розглянути та довести наступні твердження

Теорема 1. *Якщо пряма b паралельна до прямої a, то дві довільні точки A' і B' прямої b відстоять на однаковій відстані від прямої a.*

Теорема 2. *Якщо точки A' і B' прямої b відстоять на однаковій відстані від прямої a та належать одній півплощині відносно неї, то пряма b паралельна до прямої a.*

Для засвоєння ГМТП №5 доцільно запропонувати наступні задачі

Задача 2.1. В площині даного кута знайти точку, яка відстоїть на даних відстанях $a > 0$ і $b > 0$ від його сторін. *Якою буде відповідь, якщо в умові задачі сторони кута замінити на прямі, що їх містять?*

Задача 2.2. Знайти ГМТП, віддалених від даної прямої l на відстань, більшу (не меншу) за довжину m даного відрізка.

Задача 2.3. Знайти ГМТП, віддалених від даної прямої l на відстань, меншу (не більшу) за довжину m даного відрізка.

Задача 2.4. Знайти ГМ центрів кіл однакового радіусу, що дотикаються даної прямої.

Задача 2.5. Знайти ГМТП, які відстоять від точок даного відрізка AB на відстані $h > 0$.

Твердження 3 (ГМТП №6) *ГМТП, рівновіддалених від кінців даного відрізка AB, є пряма, що проходить через середину відрізка AB перпендикулярно до нього («серединний перпендикуляр до відрізка AB»).*

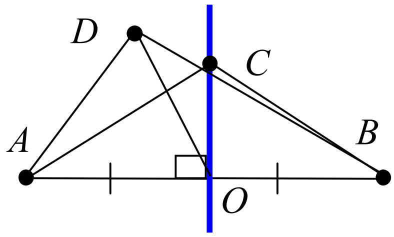


Рис. 7.: до ГМТП №6.

Доведення. Нехай AB – даний відрізок, a – пряма, що проходить через середину O відрізка AB перпендикулярно до нього (рис. 7).

1) Покажемо, що кожна точка $C \in a$ є рівновіддаленою від точок A і B.

Для цього достатньо розглянути прямокутні трикутники AOC і BOC. Вони рівні (наприклад, за ІІ ознакою рівності трикутників). Звідки маємо, що $CA = CB$ для будь-якої точки $C \in a$.

2) Покажемо тепер, що кожна точка D, яка рівновіддалена від точок A і B, належить прямій a. Припустимо обернене, а саме, що $DA = DB$ але $D \notin a$. Тоді $\triangle ADB$ рівнобедрений, а медіана DO є висотою цього трикутника. Таким чином, через точку O прямої AB проходить дві різні прямі a і DO перпендикулярні до неї, чого не може бути за відомою теоремою шкільного курсу геометрії. Отже, прийшли до протиріччя, і тому наше припущення про те, що $D \notin a$ є неправильним. Отже, кожна точка шуканого ГМТП належить прямій a.

Для засвоєння ГМТП №6 доцільно запропонувати наступні задачі

Задача 3.1. Знайдіть ГМ вершин рівнобедрених трикутників, для яких даний відрізок AB є спільною основою.

Задача 3.2. Знайдіть ГМ вершин ромбів, для яких даний відрізок AC є спільною діагоналлю.

Задача 3.3. Знайдіть ГМ центрів кіл (площини), для яких даний відрізок AB (площини) є спільною хордою.

Задача 3.4. Доведіть, що пряма, яка проходить через центри двох кіл, які перетинаються у двох точках, є серединним перпендикуляром до відрізка з кінцями у зазначених точках перетину кіл.

Задача 3.5. Доведіть, що центр кола, описаного навколо трикутника ABC, є точкою перетину серединних перпендикулярів до його сторін.

Задача 3.6. Доведіть, що навколо опуклого многокутника можна описати коло тоді і лише тоді, коли серединні перпендикуляри до його сторін перетинаються в одній точці.

Твердження 4 (ГМТП №7) *ГМТП, рівновіддалених від двох даних паралельних прямих l_1 і l_2, є пряма, що паралельна до даних прямих та яка містить одну з таких точок.*

Зауважимо, що для побудови шуканої прямої достатньо побудувати точку M, яка є серединою довільного відрізка з кінцями на даних прямих та через неї провести пряму паралельно до даних (рис. 8).

Наслідок 4.1. *ГМ середин паралельних відрізків з кінцями на даних паралельних прямих l_1 і l_2 є пряма, що паралельна до даних прямих та яка містить одну з таких точок.*

Наслідок 4.2. Пряма, яка містить середню лінію трапеції, ділить навпіл будь-який відрізок з кінцями на різних її основах.

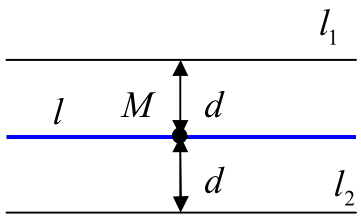


Рис. 8.: до ГМТП №7.

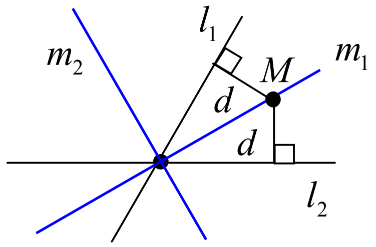


Рис. 9.: до ГМТП №8.

Твердження 5 (ГМТП №8) *ГМТП, рівновіддалених від двох даних прямих l_1 і l_2, що перетинаються, є дві (взаємно перпендикулярні) прямі, що є бісектрисами кутів, які утворені прямими l_1 та l_2.*

Ідея доведення. Розглянемо одну з двох пар вертикальних кутів, які утворюють дані прямі та пряму m_1, що містить бісектрису одного з них (рис. 9). Тоді за властивістю бісектриси довільного кута, кожна її точка M є рівновіддаленою від даних прямих l_1 і l_2. Будь-яка інша точка M', що є рівновіддаленою від прямих l_1 і l_2, або належить прямій m_1 (бісектрисі кута або бісектрисі вертикального до нього кута), або ж прямій m_2, що містить бісектриси суміжних кутів.

Наслідок 5.1. Бісектриса («з виколотим початком») довільного кута є геометричним місцем центрів кіл, які дотикаються до сторін цього кута.

Наслідок 5.2. Бісектриса довільного кута є ГМТП, що рівновіддалені від сторін цього кута.

Для засвоєння ГМТП №8 доцільно запропонувати наступні задачі

Задача 5.1. Знайти точку, рівновіддалену від сторін даного трикутника.

Задача 5.2. Доведіть, що центр кола, вписаного в трикутник, є точкою перетину бісектрис його внутрішніх кутів.

Задача 5.3. Доведіть, що відрізки дотичних, проведених з однієї точки до даного кола, мають однакову довжину.

Задача 5.4. Доведіть, що в опуклий многокутник можна вписати коло тоді і лише тоді, коли бісектриси його внутрішніх кутів перетинаються в одній точці.

Твердження 6 (ГМТП №9) *ГМТП, які внутрішнім чином ділять паралельні відрізки з кінцями на даних прямих l_1 і l_2, що перетинаються, у даному відношенні ($m:n=\lambda>0$), є пряма (з виколотою точкою), що проходить через одну з таких точок та точку перетину даних прямих.*

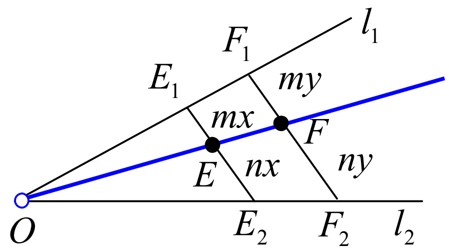


Рис. 10.: до ГМТП №9.

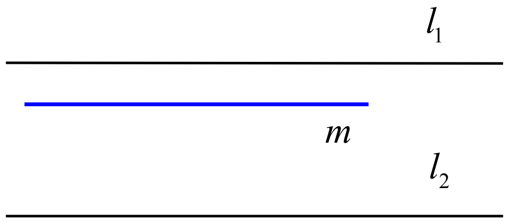


Рис. 11.: до ГМТП №10.

Доведення. Нехай прямі l_1 та l_2 перетинаються у точці O, а E_1E_2 – один з паралельних відрізків з кінцями на сторонах кута (рис. 10). Нехай $E_1 \in l_1$, $E_2 \in l_2$, а E – така точка відрізка E_1E_2, що $E_1E : EE_2 = m:n$.

1) *Покажемо, що довільна точка F прямої (OE) належить шуканому ГМТП.* Проведемо через довільну точку $F \in (OE)$ ($F \neq E$) пряму паралельно до E_1E_2, і нехай вона перетинає пряму l_1 в точці F_1 а пряму l_2 в точці F_2. Доведемо, що має місце рівність $F_1F : FF_2 = m:n$.

З подібності $\triangle OE_1E$ і $\triangle OF_1F$ маємо рівність $OE:OF = E_1E:F_1F$; а з подібності $\triangle OE_2E$ і $\triangle OF_2F$ маємо рівність $OE:OF = EE_2:FF_2$. Оскільки $E_1E:F_1F = EE_2:FF_2$, то $E_1E:EE_2 = F_1F:FF_2 = m:n$.

2) *Покажемо, що довільна точка шуканого ГМТП належить променю* (OE). Нехай D' – така внутрішня точка відрізка D_1D_2 (з кінцями на сторонах даного кута), який є паралельним до відрізка D_1D_2, для якої має місце рівність $\overrightarrow{D_1D'}:\overrightarrow{D'D_2} = m:n$. Нехай далі $(OE) \cap D_1D_2 = D$. Покажемо, що $D' = D$. За 1)-им пунктом доведення $\overrightarrow{D_1D}:\overrightarrow{DD_2} = m:n$. Тому має місце векторна рівність $\dfrac{\overrightarrow{D_1D'}}{\overrightarrow{D'D_2}} = \dfrac{\overrightarrow{D_1D}}{\overrightarrow{DD_2}}$ або ж $\dfrac{\overrightarrow{D_1D_2}}{\overrightarrow{D'D_2}} = \dfrac{\overrightarrow{D_1D_2}}{\overrightarrow{DD_2}}$. Звідки $\overrightarrow{D'D_2} = \overrightarrow{DD_2}$, або ж $\overrightarrow{D'D} = \vec{0}$. Звідки й випливає, що $D' \equiv D$ і тому належить прямій (OE).

Наслідок 6.1. ГМ середин паралельних відрізків з кінцями на сторонах даного кута є промінь (з виколотим початком), що проходить через вершину цього кута та одну з таких точок.

Твердження 7 (ГМТП №10) *ГМТП, які внутрішнім чином ділять паралельні відрізки з кінцями на даних паралельних прямих l_1 і l_2 у даному відношенні ($m:n=\lambda>0$), є пряма, що проходить через одну з таких точок та паралельна даним прямим.*

Доведення останнього твердження доцільно запропонувати для самостійного опрацювання (рис. 11).

DOI: https://doi.org/...

Задача 7.1. Доведіть, що (три точки –) середини основ довільної трапеції та точка перетину прямих, які містять її бічні сторони, належать одній прямій.

Задача 7.2. Доведіть, що основи бісектрис спільного кута усіх трикутників з паралельними протилежними сторонами належать одній прямій.

Твердження 8 (ГМТП №11) *ГМТП, для кожної з яких відношення відстаней до двох даних паралельних прямих (l_1 і l_2) є сталою величиною ($m:n\neq 1$), є сукупність двох прямих m_1 та m_2, кожна з яких проходить через одну з таких точок і паралельна даним прямим.*

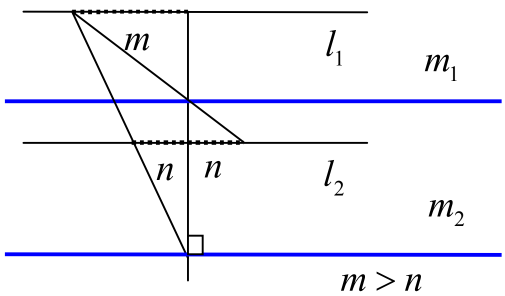


Рис. 12.: до ГМТП №11.

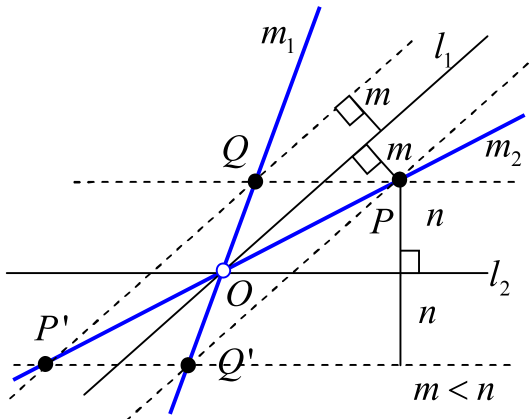


Рис. 13.: до ГМТП №12.

Твердження 9 (ГМТП №12) *ГМТП, для кожної з яких відношення відстаней до двох даних прямих (l_1 і l_2), які перетинаються, є сталою величиною ($m:n=\lambda>0$), є сукупність двох прямих m_1 та m_2 без їх спільної точки, кожна з яких проходить через одну з таких точок і точку перетину прямих.*

Зауваження 5. *Твердження 9 (ГМТП №12) є узагальненням Твердження 5 (ГМТП №8) коли $m=n$.*

Твердження 10 (ГМТП №13) *ГМТП, з яких даний відрізок AB видно під нерозгорнутим кутом α, є дві дуги (без кінцевих точок), що є симетричними відносно даного відрізка та одна з яких вміщує кут, рівний даному.*

Доведення.

1) Нехай $\overset{\frown}{BMA}$ – дуга кола ω_1, яке вміщує кут $\angle AMB=\alpha$ (рис. 14).

Відомо, що всі кути, які є вписаними у коло ω_1, вершини яких лежать в одній півплощині відносно прямої (AB) та спираються на відрізок AB, рівні між собою. Тому $\angle AKB=\alpha$ для довільної точки K відкритої дуги $\overset{\frown}{BMA}$.

Нехай O_1 – центр кола ω_1, а точка O – середина відрізка AB. Тоді $\angle AO_1B=2\alpha$ (як центральний кут, що стягує хорду AB). Звідки $\angle O_1AB=90^\circ-\alpha$. Таким чином, центр O_1 кола ω_1: з одного боку – рівновіддалений від точок A і B; з іншого боку – належить променю AQ кута $\angle QAB=90^\circ-\alpha$.

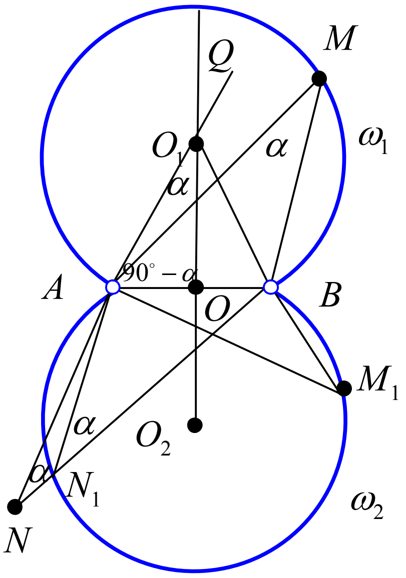


Рис. 14.: до ГМТП №13.

Отже, кожна точка відкритої дуги $\overset{\frown}{BMA}$ (без кінцевих точок A і B) кола $\omega_1 = \omega(O_1, O_1A)$ задовольняє умовам задачі. Проте вказаним умовам задовольняють і всі точки відкритої дуги $\overset{\frown}{AM_1B}$, симетричної дузі $\overset{\frown}{BMA}$ відносно AB. **Таким чином, кожна точка фігури** $F = \overset{\frown}{BMA} \cup \overset{\frown}{AM_1B}$ **(«вісімки») належить шуканому ГМТП.**

2) Покажемо, що довільна (але фіксована) точка N шуканого ГМТП належить фігурі $F = \overset{\frown}{BMA} \cup \overset{\frown}{AM_1B}$**.** Оскільки $0^0 < \alpha < 180^0$, то без втрати загальності можна вважати, що точка N належить тій півплощині відносно прямої (AB), якій належить точка M_1.

Припустимо, що $N \notin \overset{\frown}{AM_1B} \subset \omega_2$. Тоді N належить або внутрішній, або зовнішній частині площини відносно кола ω_2. Нехай, заради визначеності, $O_2N > O_2N_1$, де $N_1 = [BN) \cap \omega_2$. Тоді точки A, N, N_1 не належать одній прямій і тому є вершинами трикутника. За припущенням $\angle ANB = \alpha$, а $\angle AN_1B = \alpha$ за доведеним вище. Тому (за наслідком з властивості зовнішнього кута $\triangle ANN_1$ при вершині N_1) $\angle NAN_1 = 0^0$, чого бути не може, бо ANN_1 є трикутником. Прийшли до протиріччя і тому наше припущення про те що $N \notin \overset{\frown}{AM_1B} \subset \omega_2$ є неправильним. Отже, довільна точка N шуканого ГМТП належить фігурі $F = \overset{\frown}{BMA} \cup \overset{\frown}{AM_1B}$**.**

Зауваження 6. *Якщо $\alpha = 90^\circ$, то точки O_1 і O_2 співпадають з точкою O (серединою відрізка AB). Тому вершинами прямих кутів, що спираються на даний відрізок, є виключно точки кола (крім точок A і B), побудованого на відрізку AB, як на діаметрі.*

DOI: https://doi.org/...

Наслідок 10.1. (ГМТП №14) *ГМ вершин прямокутних трикутників із спільною гіпотенузою AB є коло без точок A і B, побудоване на відрізку AB, як на діаметрі.*

Задача 10.1. Знайти ГМ основ перпендикулярів, опущених з даної точки A на прямі, які проходять через другу дану точку B.

З урахуванням результатів задачі №2 [23, С. 33-34], знайдіть наступні ГМТП

Задача 10.2. Знайти ГМ вершин (C) прямокутних трикутників (ABC) зі спільною стороною AB.

Задача 10.3. Знайти ГМ вершин (C) гострокутних трикутників (ABC) зі спільною стороною AB.

Задача 10.4. Знайти ГМ вершин (C) тупокутних трикутників (ABC) зі спільною стороною AB.

Твердження 11 (ГМТП №15) *ГМТП, що є серединами хорд сталої довжини a даного кола $\omega(O,R)$, є коло, концентричне даному та радіус якого дорівнює $R' = \sqrt{R^2 - (a/2)^2}$.*

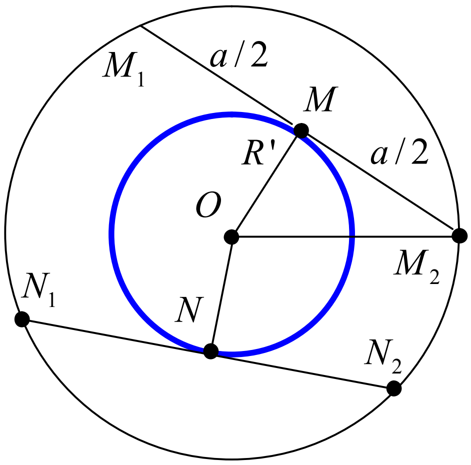


Рис. 15.: до ГМТП №15.

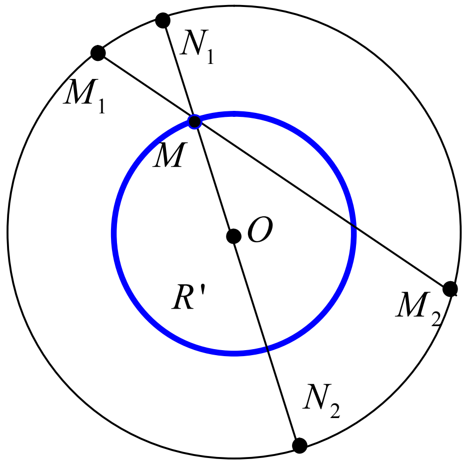


Рис. 16.: до ГМТП №16.

Доведення.

1) Нехай M_1M_2 – довільна хорда довжини a даного кола $\omega(O,R)$. З точки O опустимо перпендикуляр OM на M_1M_2. Тоді M – середина хорди M_1M_2 і тому належить шуканому ГМТП.

З прямокутного трикутника OMM_2 за теоремою Піфагора маємо, що $OM^2 = OM_2^2 - MM_2^2 = R^2 - (a/2)^2 = const$. Звідки OM – стала величина.

Отже, довільна точка шуканого ГМТП відстоїть від даної точки O на сталій відстані $R' = \sqrt{R^2 - (a/2)^2}$ і тому належить колу $\omega(O,R')$.

2) *Покажемо, що довільна (але фіксована) точка N кола $\omega(O,R')$ належить шуканому ГМТП.*

Для цього достатньо показати, що існує хорда кола $\omega(O,R)$ довжини a, для якої точка N є серединою. Проведемо через точку N дотичну до кола $\omega(O,R')$ і нехай вона перетинає коло $\omega(O,R)$ у точках N_1 та N_2. Оскільки $\triangle ONN_2$ є прямокутним, то за теоремою Піфагора маємо, що $NN_2=\sqrt{R^2-R'^2}=a/2$. Оскільки $\triangle ONN_1=\triangle ONN_2$ (за гіпотенузою та спільним катетом), то $N_1N=NN_2$. Звідки $N_1N_2=a$.

Таким чином, кожна точка кола $\omega(O,R')$ належить шуканому ГМТП.

Твердження 12 (ГМТП №16 – узагальнення ГМТП №15) *ГМТП, що ділять у певному відношенні $m:n=\lambda>0$ хорди сталої довжини a даного кола $\omega(O,R)$, є коло концентричне даному та радіус якого дорівнює віддалі від центра даного кола до однієї з таких точок.*

Доведення. Нехай M_1M_2 – хорда довжини a даного кола $\omega(O,R)$, а точка M ділить (направлений відрізок) M_1M_2 у відношенні $m:n$ (рис. 16). Тоді очевидно, що $M_1M=\dfrac{m}{m+n}a$, а $MM_2=\dfrac{n}{m+n}a$.

Через точку M проведемо діаметр N_1N_2. Тоді маємо рівність $N_2M\cdot MN_1=M_1M\cdot MM_2$. Звідки

$$\left(R+OM\right)\left(R-OM\right)=\frac{m}{m+n}a\cdot\frac{n}{m+n}a, \text{ або ж } R^2-OM^2=mn\cdot\left(\frac{a}{m+n}\right)^2.$$

Тому $OM=\sqrt{R^2-mn\cdot\left(\dfrac{a}{m+n}\right)^2}=R'$ – стала величина.

Отже, довільна точка шуканого ГМТП відстоїть від даної точки O на сталій відстані R' і тому належить колу $\omega(O,R')$.

Доведення 2)-ої частини пропонуємо провести самостійно.

Твердження 13 (ГМТП №17) *ГМ середин хорд даного кола $\omega(O,R)$, які проходять через дану внутрішню його точку M, є коло, для якого центр O даного кола та дана точка M є діаметрально протилежними.*

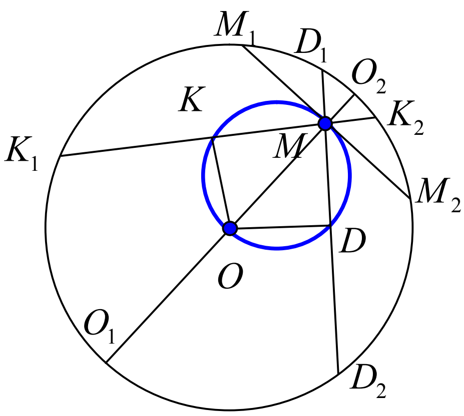


Рис. 17.: до ГМТП №17.

Доведення.

Очевидно, що точка O належить шуканому ГМТП (як середина хорди, що є діаметром). Проведемо через точку M хорду M_1M_2 перпендикулярно до діаметра O_1O_2, який містить точку M. Тоді M також належить шуканому ГМТП, бо $M_1M = MM_2$. Побудуємо коло ω_0 на відрізку OM, як на діаметрі.

1) *Покажемо, що довільна точка шуканого ГМТП належить колу ω_0.*

Нехай точка D є серединою хорди D_1D_2 даного кола, яка проходить через дану точку M. Оскільки $D_1D = DD_2$, то $OD \perp DM$. І тому $\angle ODM = 90^\circ$. Отже, $D \in \omega_0$.

2) *Покажемо, що кожна точка кола ω_0 є серединою певної хорди даного кола, яка проходить через дану точку M.*

Нехай K – точка кола ω_0. Проведемо пряму MK і нехай вона перетинає дане коло $\omega(O,R)$ у точках K_1 і K_2. Оскільки $\angle OKM = 90^0$, то $K_1K = KK_2$. Тому довільна точка кола ω_0 належить шуканому ГМТП.

Задача 13.1. Дано коло $\omega(O,R)$ і така точка M, що $OM = R$. Знайти ГМ середин хорд даного кола, які проходять через точку M.

Задача 13.2. Дано коло $\omega(O,R)$ і така точка M, що $OM > R$. Знайти ГМ середин хорд даного кола, продовження яких проходять через точку M.

Задача 13.3. Дано коло $\omega(O,R)$ та його діаметр AB. На кожному з радіусів кола ω відкладають від центра O відрізок, довжина якого дорівнює відстані від кінця радіуса до діаметра AB. Знайдіть ГМ кінців побудованих у такий спосіб відрізків (зі спільним кінцем O).

Твердження 13 (ГМТП №18) *ГМТП, відстані (ρ_1 і ρ_2) яких до двох даних точок (A і B відповідно) перебувають у даному відношенні ($\rho_1 : \rho_2 = m : n$) є* ***коло («Аполлонія») з певним центром та певного радіусу.***

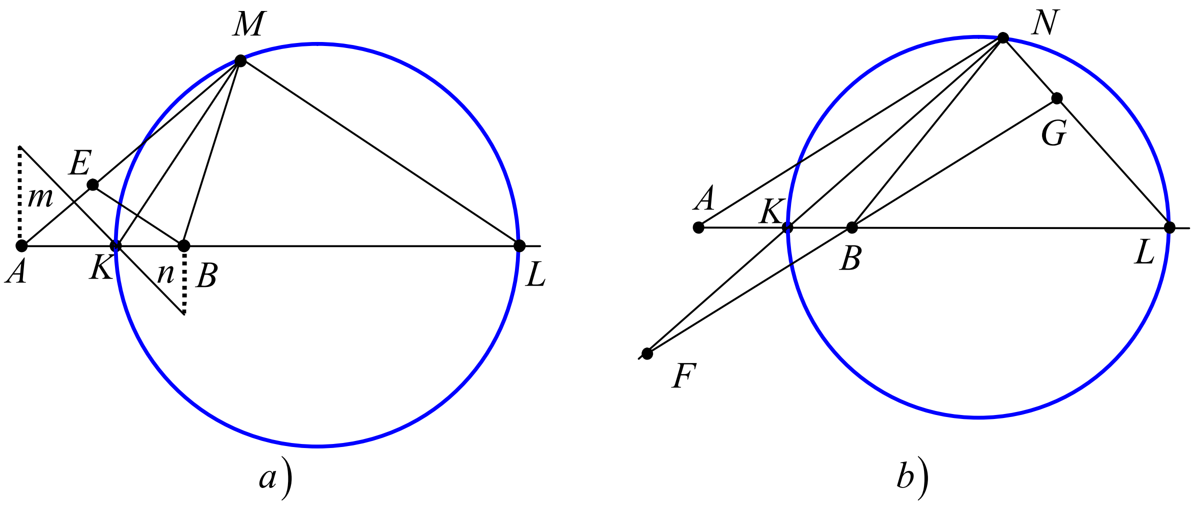


Рис. 18.: до ГМТП №18.

Доведення.

1) Нехай M – довільна (але фіксована) точка шуканого ГМТП (рис. 18). Тоді має місце рівність $MA:MB=m:n$. Заради визначеності будемо вважати, що $m>n$. Побудуємо далі точку K, яка ділить (направлений) відрізок AB внутрішнім чином у відношенні $m:n$. Зауважимо, що для фіксованого відрізка AB і сталих m, n точка K визначається однозначно.

Розглянемо $\triangle AMB$. В ньому $AK:KB=MA:MB$. Звідки випливає, що MK – бісектриса $\angle AMB$. *Покажемо справедливість останньої тези.*

Нехай K' – основа бісектриси $\angle AMB$ трикутника AMB. Тоді за властивістю бісектриси кута трикутника маємо рівність $AK':K'B=MA:MB$. Оскільки $AK:KB=MA:MB$, то $AK':K'B=AK:KB$. Звідки $AB:K'B=AB:KB$, або ж $BK'=BK$. Оскільки K і K' належать одному променю $[BA)$, то за аксіомою відкладання відрізків точки K і K' співпадають. Тому MK бісектриса $\angle AMB$.

Далі через точку M проведемо пряму перпендикулярну до MK. І нехай вона перетинає пряму (AB) у точці L.

Проведемо через точку B пряму паралельну до (ML). І нехай вона перетинає пряму (AM) у точці E. За властивістю паралельних $BE\perp MK$, за побудовою – MK є бісектрисою $\angle AMB$. Тому $ME=MB$.

За теор. Фалеса має місце рівність $\frac{LA}{LB}=\frac{MA}{ME}$. Звідки $\frac{LA}{LB}=\frac{MA}{MB}=\frac{m}{n}$. Отже, точка L ділить відрізок AB зовнішнім чином у відношенні $m:n$. А тому визначається однозначно.

Оскільки для довільної точки M шуканого ГМТП $\angle KML=90^0$, то точка M належить колу ω_{18}, побудованому на відрізку KL, як на діаметрі.

Отже, кожна точка шуканого ГМТП належить колу ω_{18}, діаметр якого визначається точками K і L, що ділять даний відрізок AB внутрішнім та зовнішнім чином у даному відношенні $m:n$.

2) *Тепер покажемо, що довільна точка N кола ω_{18} належить шуканому ГМТП.* Для цього досить показати справедливість рівності $NA:NB=m:n$. Проведемо через точку B пряму паралельно до прямої (NA). І нехай вона перетинає пряму (NK) у точці F, а пряму (NL) – у точці G.

З подібності трикутників AKN і BKF маємо рівність

$$NA:BF=AK:KB=m:n. \tag{13.1}$$

З подібності трикутників ANL і BGL маємо рівність

$$AN:BG=LA:LB=m:n. \tag{13.2}$$

З (13.1) і (13.2) випливає, що $FB=BG$. Оскільки трикутник FNG є прямокутним, то $NB=FB=BG$. Тому з рівності (13.1) маємо, що $NA:NB=m:n$.

Отже, кожна точка кола ω_{18} належить шуканому ГМТП.

Твердження 14 (ГМТП №19) *ГМТП, сума квадратів відстаней яких до двох даних точок (A і B) є величина стала (a^2, де a – довжина даного відрізка), є коло з певним центром та певного радіуса.*

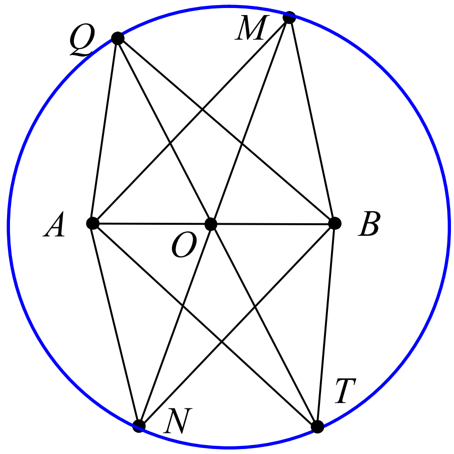


Рис. 19.: до ГМТП №19.

Доведення.

1) Нехай M – довільна (але фіксована) точка шуканого ГМТП (рис. 19). Тоді має місце рівність $MA^2+MB^2=a^2$. Нехай далі O – середина відрізка AB, а N є такою точкою площини, що O – середина відрізка MN. Тоді за ознакою чотирикутник $AMBN$ є паралелограмом. Тому за властивістю паралелограма має місце рівність $AM^2+MB^2+BN^2+NA^2=AB^2+MN^2$ або ж

$$2a^2=AB^2+MN^2.$$

Звідки, позначивши довжину заданого відрізка AB через b, маємо рівність $MN=\sqrt{2a^2-b^2}$. Оскільки O є серединою MN, то $OM=\dfrac{\sqrt{2a^2-b^2}}{2}=R'$ – стала величина.

Таким чином довільна точка M шуканого ГМТП належить колу $\omega_{19}=\omega(O,R')$.

2) *Нехай Q – довільна точка кола $\omega_{19}=\omega(O,R')$. Покажемо, що справджується рівність $QA^2+QB^2=a^2$.*

Нехай пряма QO вдруге перетинає коло $\omega_{19}=\omega(O,R')$ у точці T. Оскільки $AO=OB$ (за припущенням), $QO=OT$ (як радіуси кола ω_{19}), то за ознакою чотирикутник $AQBT$ є паралелограмом. А тому справджується рівність $AQ^2+QB^2+BT^2+TA^2=AB^2+QT^2$ або ж

$2\left(AQ^2+QB^2\right)=AB^2+\left(2\cdot QO\right)^2$. Звідки

$$2\left(AQ^2+QB^2\right)=b^2+\left(\sqrt{2a^2-b^2}\right)^2=b^2+2a^2-b^2=2a^2.$$

Отже, $QA^2+QB^2=a^2$ і тому довільна точка кола ω_{19} належить шуканому ГМТП.

Твердження 15 (ГМТП №20) *ГМТП, різниця квадратів відстаней яких до двох даних точок* (A і B) *є величина стала* (a^2*, де* a *– довжина даного відрізка*)*, є пряма* (l_{20})*, що перпендикулярна заданій прямій* (AB) *і перетинає його у певній точці* (X*, яка визначається рівністю* $XA^2 - XB^2 = a^2$).

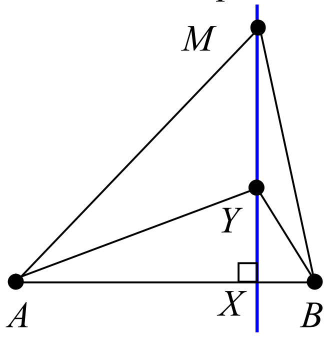


Рис. 20.: до ГМТП №20.

Доведення.

1) Нехай M – довільна (але фіксована) точка шуканого ГМТП (рис. 20). Тоді, без втрати загальності, можна вважати, що саме $MA^2 - MB^2 = a^2$, звідки $MA > MB$. Опустимо з точки M перпендикуляр MX на пряму AB. Тоді з прямокутного $\triangle AXM$ за теоремою Піфагора маємо рівність

$$MA^2 = XA^2 + XM^2. \tag{15.1}$$

З прямокутного $\triangle BXM$ за теоремою Піфагора маємо рівність

$$MB^2 = XB^2 + XM^2. \tag{15.2}$$

З (15.1) і (15.2) маємо, що $$XA^2 - XB^2 = a^2. \tag{15.3}$$

Повторюючи аналогічні міркування не важко показати, що для довільної точки Y прямої MX (яку можна розглядати як пряму l_{20}, що проходить через точку X перпендикулярно до прямої AB), справджується рівність $YA^2 - YB^2 = a^2$, *звідки й випливає, що довільна точка прямої* l_{20} *належить шуканому ГМТП.*

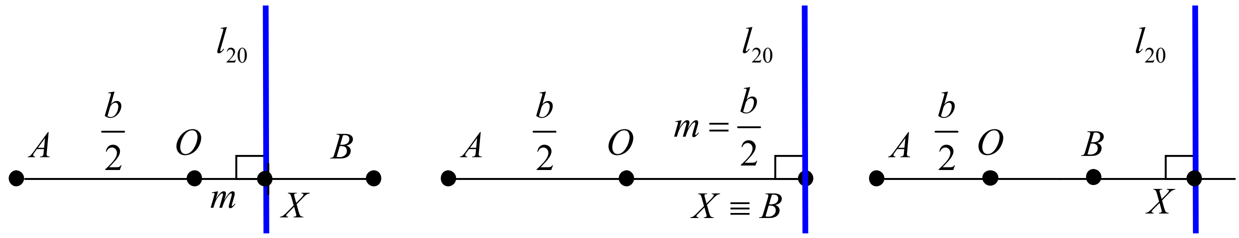
2) За **базовою задачею №3** на прямій AB існує єдина точка X, що задовольняє умову (15.3). Звідки маємо, що для даних точок A і B та даного відрізка довжини a точка X є фіксованою точкою прямої AB. І тому, з урахуванням 1)-ої частини доведення, основа перпендикуляра, опущеного з довільної точки шуканого ГМТП, співпадає із точкою X прямої AB. Тобто, довільна точка шуканого ГМТП (ортогонально) проектується саме у точку X прямої AB. *Звідки й випливає (це не важко показати, наприклад, методом від супротивного), що довільна точка шуканого ГМТП належить прямій* l_{20}.

Зауваження 7. Для побудови прямої l_{20} (та зазначеної точки X на прямій AB), достатньо побудувати (на допоміжному рисунку) довільний прямокутний $\triangle MNP$, у якого $\angle N = 90^0$, $NP = a$. Тоді матиме місце рівність $NP^2 = MP^2 - MN^2 = a^2$. Далі з центрів A і B опишемо дуги радіусами MP та MN (відповідно) до перетину їх у точці K. Точка K належить шуканій прямій l_{20} ($l_{20} \perp AB$), а $X = l_{20} \cap AB$.

DOI: https://doi.org/...

Зауваження 8. (*Альтернативний спосіб розв'язання базової задачі 3 та побудови точки X прямої AB, яка задовольняє умову $XA^2 - XB^2 = a^2 > 0$*).

Отже, нехай X – така точка на прямій AB, яка задовольняє умову $XA^2 - XB^2 = a^2$ ($a > 0$). Оскільки $XA^2 - XB^2 > 0$, то $AX > XB$. Це означає, що точка X належить променю OB, де O – середина відрізка AB. Нехай b – довжина відрізка AB. Тоді $AX = \frac{b}{2} + m$, де $m > 0$. Крім того, можливими є лише наступні три суттєво різні випадки: 1) $0 < m < \frac{b}{2}$; 2) $m = \frac{b}{2}$; 3) $m > \frac{b}{2}$.



$a)$ $0 < m < \frac{b}{2} \Leftrightarrow a < b$ $b)$ $m = \frac{b}{2} \Leftrightarrow a = b$ $c)$ $m > \frac{b}{2} \Leftrightarrow a > b$

Рис. 21.: до ГМТП №20.

Розглянемо кожен з них окремо.

1) Якщо $0 < m < \frac{b}{2}$, то $XB = \frac{b}{2} - m$, $a^2 = AX^2 - XB^2 = \left(\frac{b}{2} + m\right)^2 - \left(\frac{b}{2} - m\right)^2 =$
$= 2bm$, звідки $m = \frac{a^2}{2b}$, $AX = \frac{b}{2} + \frac{a^2}{2b} = \frac{a^2+b^2}{2b} = const$;
крім того, оскільки $0 < m < \frac{b}{2}$, то $\frac{a^2}{2b} < \frac{b}{2}$, звідки $a < b$.

2) Якщо $m = \frac{b}{2}$, то $AX = b$, $X \equiv B \Rightarrow XB = 0$, $a^2 = b^2 - 0^2$, звідки $a = b$.

3) Якщо $m > \frac{b}{2}$, то $XB = m - \frac{b}{2}$, $a^2 = AX^2 - XB^2 = \left(\frac{b}{2} + m\right)^2 - \left(m - \frac{b}{2}\right)^2 =$
$= 2bm$, звідки $m = \frac{a^2}{2b}$, $AX = \frac{b}{2} + \frac{a^2}{2b} = \frac{a^2+b^2}{2b} = const$;
крім того, оскільки $m > \frac{b}{2}$, то $\frac{a^2}{2b} > \frac{b}{2}$, звідки $a > b$.

Ну і навпаки, методом від супротивного не важко переконатися в тому, що для точки X прямої AB, яка задовольняє умову $XA^2 - XB^2 = a^2 > 0$, мають місце й обернені твердження, а саме:

1*) якщо $a < b$, то $0 < m < \frac{b}{2}$, звідки точка X є внутрішньою точкою відрізка OB;

2*) якщо $a = b$, то $m = \frac{b}{2}$, звідки точка X співпадає із точкою B;

3*) якщо $a > b$, то $m > \frac{b}{2}$, звідки точка X належить продовженню відрізка AB за точку B.

Крім того, за аксіомою відкладання відрізків положення точки X на промені AB визначається однозначно, бо $AX = \frac{a^2+b^2}{2b} = const$.

З останнього й випливає, що на прямій AB існує єдина точка X, яка задовольняє умову $XA^2 - XB^2 = a^2 > 0$. Більше того, наведено спосіб побудови зазначеної точки X за допомогою побудови відрізка AX, як «четвертого пропорційного», бо $AX = \frac{a^2+b^2}{2b} = \frac{c^2}{m}$, де c – гіпотенуза прямокутного трикутника з катетами a і b, $n = 2b$.

2.2. Наслідки та прикінцеві зауваження

З альтернативними способами доведення наведених вище тверджень можна ознайомитися, наприклад, в [1–3, 5–7, 22, 26, 29].

Слід також відзначити, що, запропоновані у статті способи доведення тверджень, авторами свідомо проведено без використання методу координат, проте максимально спираючись на твердження саме шкільного курсу геометрії, що принципово дозволяє «рівномірно» знайомити учнів з ГМТП у 7-9 класах. Метод координат доцільно пропонувати в якості одного з альтернативних способів для «передоведення» тверджень або ж під час висунення гіпотез та при вивченні теми «Декартові координати на площині».

На підставі аналізу наявного у діючих підручниках теоретичного матеріалу та дидактичного забезпечення, автори вважають, що є всі ознаки присутності (хоча, і неявно) **в шкільному курсі геометрії наскрізної лінії «Геометричні місця точок»**. Одним із підтверджень останньої тези є те, що при вивчені теми «Декартові координати на площині» поняття ГМТ є основним, бо фігура (ГМТ) може бути задана або характеристичною властивістю, або рівнянням. А сам метод координат і полягає у вивченні властивостей фігур (ГМТ) за їх рівняннями. Крім того, більшість із пропонованих у підручниках задач на відшукання ГМТП досить просто зводяться до одного з наступних **основних ГМТП**, а саме:

* ГМТП, рівновіддалених від даної точки («коло»);
* ГМТП, рівновіддалених від даної прямої («пара паралельних прямих»);
* ГМТП, рівновіддалених від двох даних точок («пряма – серединний перпендикуляр до відрізка з кінцями у даних точках»);
* ГМТП, кожна з яких лежить усередині даного кута і рівновіддалена від його сторін («бісектриса кута»);
* ГМТП, рівновіддалених від двох даних прямих, що перетинаються («пара перпендикулярних прямих»);
* ГМТП, рівновіддалених від двох даних паралельних прямих («рівновіддалена пряма»);
* ГМТП, з яких даний відрізок видно: під прямим кутом («коло, побудоване на даному відрізку як на діаметрі»); під даним гострим / тупим кутом («дві дуги, що мають своїми кінцями кінці даного відрізка та одна з яких вміщує даний кут»).

«Загальноприйняті» **основні ГМТП** доцільно доповнити й «більш складними» геометричними місцями точок, такими як:

* ГМТП, відношення відстаней яких до двох даних точок є величина стала («коло Аполлонія»).
* ГМТП, сума квадратів відстаней яких до двох даних точок є величина стала («коло з центром у середині заданого відрізка»).
* ГМТП, різниця квадратів відстаней яких до двох даних точок є величина стала («пряма лінія»).

У діючих підручниках з геометрії, крім основних, пропонуються й інші ГМТП, які, зазвичай, подано у вигляді задач з числовими даними.

Маємо своїм обов'язком також відзначити, що ціла низка важливих, не менш цікавих ГМТП (які знаходять широкі застосування в геометрії кіл), пов'язана з такими поняттями як: *степінь точки відносно кола; радикальна вісь двох кіл; діаметральна вісь двох кіл* (див., напр., [1, 2, 5, 18, 22, 29, 30]).

Нижче розглянемо приклади на доведення властивостей геометричних фігур за допомогою наведених вище ГМТП.

Приклад 1. *Нехай MT_1 та MT_2 – відрізки дотичних, проведених з точки M до кола $\omega(O;r)$. Доведіть, що: MO – бісектриса кута T_1MT_2; $MT_1 = MT_2$.*

Доведення. За властивістю дотичної до кола $\angle MT_1O = \angle MT_2O = 90^0$, тому точка O, яка лежить усередині $\angle T_1MT_2$, є рівновіддаленою від його сторін (бо $OT_1 = OT_2 = r$). А тому (за наслідком 5.2) належить відповідному ГМТП, яке є бісектрисою $\angle T_1MT_2$. Оскільки MO – бісектриса $\angle T_1MT_2$, то $\triangle MT_1O = \triangle MT_2O$ (за катетом та протилежним кутом), звідки $MT_1 = MT_2$.

Приклад 2. *Доведіть, що для довільної трапеції $ABCD$ ($BC \parallel AD$) середини основ та точка перетину продовжень бічних сторін належать одній прямій.*

Доведення. За визначенням трапеції її бічні сторони не є паралельними, і тому їх продовження перетинаються в одній точці S. Точки M і N можна розглядати як точки, що (внутрішнім чином) ділять в однаковому відношенні (1:1) паралельні відрізки BC та AD з кінцями на прямих SA та SD. Звідки й випливає (за ГМТП9), що точки M і N належать одній прямій, яка проходить через точку перетину прямих SA та SD – точку S.

Приклад 3. *Доведіть, що пряма, яка містить середини M і N протилежних сторін (AB і CD відповідно) паралелограма $ABCD$ ділить навпіл довільний відрізок EF з кінцями на сторонах BC та AD (відповідно).*

Доведення. Проведемо через точку M спільний перпендикуляр M_1M_2 до паралельних прямих AD та BC. Тоді з рівності прямокутних трикутників MM_1A та MM_2B (за гіпотенузою та гострим кутом) матимемо, що точка M є рівновіддаленою від паралельних прямих BC та AD. Аналогічне має місце і для точки N. Тому за ГМТП 7, пряма MN є ГМТП, що рівновіддалені від прямих BC та AD. А тому і точка $Q = MN \cap EF$ є рівновіддаленою від прямих BC та AD. Проведемо через точку Q спільний перпендикуляр Q_1Q_2 до паралельних прямих AD та BC. Тоді з рівності прямокутних трикутників QQ_2E та QQ_1F (за катетом та гострим кутом) матимемо, що $BQ = QF$.

З урахуванням наведених прикладів, автори переконані, що при наданні «основним ГМТ» та «базовим задачам на ГМТ» в шкільному курсі геометрії статусу теорем, з'явиться принципова можливість говорити про метод ГМТ, як самодостатній метод розв'язування геометричних задач без традиційної «прив'язки» методу ГМТ виключно до задач на побудову.

Висновки

Таким чином, в представленій статті наведено один з можливих підходів до вивчення здобувачами вищої освіти, майбутніми вчителями математики, найбільш поширених геометричних місць точок площини. З дотриманням належного рівня математичної строгості авторами наведено доведення (спираючись виключно на твердження шкільного курсу геометрії) 19 тверджень про найбільш важливі ГМТ площини та запропоновано більше 30 задач на їх застосування.

Автори переконані, що зміст запропонованого матеріалу, має бути обов'язковим змістовим модулем відповідної обов'язкової компоненти усіх освітньо-професійних програм підготовки здобувачів вищої освіти за предметною спеціальністю 014.04 Середня освіта (Математика). Крім того, автори щиро сподіваються, що існуючий стан справ можна виправити за рахунок використання запропонованого матеріалу під час курсів підвищення кваліфікації вчителів математики.

Наступним очевидним кроком у даному напрямку є проведення аналогічних досліджень щодо систематизації геометричних місць точок простору та їх вивчення у шкільному курсі геометрії, зокрема як пропедевтики вивчення поверхонь в курсі аналітичної геометрії.

З урахуванням наведених у заключній частині статті прикладів, не менш цікавим здаються дослідження щодо застосування методу ГМТ для розв'язування не задач на побудову, а як самостійного методу доведення геометричних тверджень.

Література

1. Аргунов Б.И. Геометрические построения на плоскости: [Пособие для студентов педагогических институтов] / Б.И. Аргунов, М.Б. Балк. [2-е изд.]. М.: Учпедгиз, **1957**. 264 с.
2. Астряб О.М., Смогоржевський О.С. та інші Методика розв'язування задач на побудову. К. : «Радянська школа», **1960**. 387 с.
3. Балан В.Г. Геометричні задачі на побудову на вступних іспитах / В.Г. Балан, В.І. Лавренюк, Л.І. Шарова. К. : Альфа, **2005**. 86 с.
4. Бондар Д.С., Кадубовський О.А. Про дві «очевидні» задачі шкільного курсу геометрії та суміжні питання. ІІІ Всеукраїнська науково-методична інтернет-конференція студентів, аспірантів та молодих вчених «Розвиток інтелектуальних умінь і творчих здібностей учнів та студентів у процесі навчання дисциплін природничо-математичного циклу «ІТМ*плюс-2022». Форум молодих дослідників». 18 листопада 2022 р. Суми : СумДПУ імені А.С. Макаренка, **2022**. С. 13 – 14. 152 с.
5. Боровик В.Н. Геометричні перетворення площини. Навч. посіб. для студ. фіз.-мат. фак. вищ. пед. навч. закл. // В.Н. Боровик, І.В. Зайченко, М.М. Мурач, В.П. Яковець. Книга для студентів ВНЗ. Університетська книга, **2003**. 706 с.

DOI: https://doi.org/...

6. Бурда М. І. Розв'язування задач на побудову в 6 – 8 класах: Метод. пос. К. : Рад. шк., **1986**. 112 с.
7. Возняк О. Геометричні місця точок на площині : навч. посібн. / О.Г. Возняк, Г.М. Возняк. Тернопіль : Підручники і посібн., **2021**. 80 с.
8. Геометрія : підруч. для 7-го кл. загальноосвіт. навч. закл. / М.І. Бурда, Н.А. Тарасенкова. – К. : Видавничий дім «Освіта», **2015**. – 208 с.
9. Геометрія : підруч. для 8 кл. закладів заг. серед. освіти / М.І. Бурда, Н.А. Тарасенкова. – К. : УОВЦ «Оріон», **2021**. – 224 с.
10. Геометрія : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. / М.І. Бурда, Н.А. Тарасенкова. – К. : УОВЦ «Оріон», **2017**. – 224 с.
11. Геометрія : Підруч. для 7-го кл. загальноосвіт. навч. закл. / Г.П. Бевз, В.Г. Бевз, Н.Г. Владімірова. – К. : Вид.-во «Відродження», **2015**. - 192 с.
12. Геометрія : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз, Н. Г. Владімірова. – К. : Видавничий дім «Освіта», **2017**. – 272 с.
13. Геометрія : підруч. для 7-го кл. загальноосвіт. навч. закл. / О.С. Істер. – Київ : Генеза, **2015**. – 184 с.
14. Геометрія : підруч. для 8 кл. закладів заг. серед. освіти / О.С. Істер. 2-ге видання, переробл. К. : Генеза, **2021**. 240 с.
15. Геометрія : підруч. для 7 кл. закладів заг. серед. освіти / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. 2-ге вид., перер. Х. : Гімназія, **2020**. 240 с.
16. Геометрія : підруч. для 8 кл. закладів заг. серед. освіти / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, М.С. Якір. 2-ге вид., перер. Х. : Гімназія, **2021**. 208 с.
17. Геометрія для загальноосвітніх навчальних закладів з поглибленим вивченням математики : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, М.С. Якір. Х. : Гімназія, **2017**. 304 с.
18. Кадубовський О.А., Бунакова А.С. Про деякі застосування кіл нульового радіусу. Збірник наукових праць фізико-математичного факультету СДПУ. **2011**. № 1. С. 150–161.
19. Ленчук І.Г. До методики відшукання геометричних місць точок. Математика в рідній школі. **2015** (1-2): 10-5.
20. Ленчук І.Г. Метод геометричних місць точок: типізація задач. Науково-методичний журнал «Математика в рідній школі». **2016** (2): 26-31.
21. Лоповок Л.М. Сборник стереометрических задач на построение. – М.: Учпедгиз, 1950. – 72 с.
22. Моторный Л.Т. Методические указания к решению задач на построение. Славянск: СГПИ, **1989**. 44 с.
23. ОЛІМПІАДНІ ЗАДАЧІ: розв'язання задач ІІ етапу Всеукраїнської олімпіади з математики – 2011 / Б.Б. Беседін, О.А. Кадубовський, В.М. Кадубовська, В.С. Сьомкін, Н.І. Труш, О.В. Чуйко, М.М. Рубан // Випуск 10, СЕРІЯ: Викладачі СДПУ – учням, студентам, вчителям: Навчальний посібник. Слов'янськ, **2012**. 84 с
24. ОЛІМПІАДНІ ЗАДАЧІ: розв'язання задач ІІ етапу Всеукраїнської олімпіади з математики – 2018 / О.А. Кадубовський, Б.Б. Беседін,

В.С. Сьомкін. Слов'янськ : видавничий центр «Маторін», **2019**. 100 с. (Викладачі ДДПУ – учням, студентам, вчителям, вип. 21).
25. ОЛІМПІАДНІ ЗАДАЧІ: розв'язання задач II етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики – 2020 : навчальний посібник / О.А. Кадубовський, Б.Б. Беседін. Слов'янськ : вид. центр «Маторін», **2021**. 94 с. (Викладачі ДДПУ – учням, студентам, вчителям, вип. 27).
26. Перепелкин Д.И. Геометрические построения в средней школе. Москва-Ленинград: Издательсво АПН РСФСР, **1947**. 84 с.
27 Погорєлов О.В. Геометрія: Планіметрія. 7-9 клас. Підручник. 7-ме вид. К.: Школяр, **2004**. 240 с.
28. Семенець С.П. Геометричні місця точок площини: постановка та розв'язування навчальних задач. Математика в школі. **2008**. № 9. С. 28-31.
29. Стражевский А.А. Задачи на геометрические места точек в курсе геометрии средней школы. М. : Учпедгиз, **1954**. 160 с.
30. Федорченко А.О., Кадубовський О.А. Про маловідому властивість радикальної осі та центри кіл, що дотикаються двох даних кіл. XV Всеукраїнська студентська наукова конференція «Перспективи розвитку точних наук, економіки та методики їх викладання». 4 – 5 грудня 2019 р., Ніжин, Україна : Тези доповідей. – Ніжин : Навчально-науковий інститут точних наук і економіки Ніжинського державного університету імені Миколи Гоголя, **2019**. С. 86-89. 123 с.

An. O. Fedorchenko, H. O. Ryzhkova, Oleksandr A. Kadubovs'kyi
Donbas State Pedagogical University, Sloviansk, Ukraine;

Geometric locus of points, equidistance

The article is dedicated to methodological and didactic aspects of studying the simplest geometric loci of points and the Method of Geometric Transformations for finding new geometric loci and solving geometric problems in the school course of geometry. Examples of possible application of the mentioned method for proving statements on establishing properties of geometric figures are provided. Additionally, the article presents an author's approach to studying the Geometric Locus of a Plane within the framework of the relevant content module of a certain educational component of educational programs for preparing higher education candidates in the subject specialization 014.04 Secondary Education (Mathematics) of the knowledge field 01 Education / Pedagogy.

Keywords: *geometric locus of points, equidistance, Method of Geometric Transformations, application of the Method of Geometric Transformations, school course of geometry, teaching, teachers' training.*