

МАТЕМАТИКА

УДК 519.175

Кадубовський О.А., Стьопкін А.В., Кириченко А.М.

¹ канд. фізико-математичних наук, доцент каф. математики та інформатики, ДВНЗ «ДДПУ»
e-mail: kadubovs@ukr.net, ORCID 0000-0003-2045-810X

² канд. фізико-математичних наук, доцент каф. математики та інформатики, ДВНЗ «ДДПУ»
e-mail: stepkin.andrej@gmail.com, ORCID 0000-0002-6130-9920

³ студентка 1 курсу магістратури фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»
e-mail: nastya.kirichenko7117@gmail.com, ORCID 0000-0003-4788-3974

ПРО ЧИСЛО НЕЕКВІВАЛЕНТНИХ ДВОКОЛЬОРОВИХ ХОРДОВИХ O -ДІАГРАМ РОДУ 2, ЯКІ МАЮТЬ ОДИН СІРИЙ (АБО ЧОРНИЙ) ЦИКЛ

Для натуральних $n \geq 5$ встановлено явні формули для підрахунку числа нееквівалентних 2-кольорових хордових O -діаграм (з n хордами), які мають лише один сірий (чорний) та $(n-4)$ чорних (відповідно сірих) циклів відносно дії дієдральної групи (порядку $2n$). Крім того, для натуральних 5, 6 та 7 в явному вигляді наведено всі нееквівалентні діаграми із зазначених класів, а для натуральних $5 \leq n \leq 36$ наведено точні значення числа нееквівалентних таких діаграм.

Ключові слова: 2-кольорова хордова O -діаграма з n хордами, род діаграми, цикл діаграми, дієдральна група.

Вступ

Нагадаємо, що хордовою діаграмою або, коротко, n -діаграмою називають конфігурацію на площині, що складається з кола, $2n$ точок на ньому (які є вершинами правильного $2n$ -кутника) та n хорд, що сполучають вказані точки.

Хордові діаграми називають *ізоморфними*, якщо одну можна одержати з іншої в результаті повороту.

Діаграми називають *еквівалентними*, якщо їх можна сумістити за допомогою повороту, дзеркального відбиття, або ж їх композиції.

Питаннями переліку певних класів хордових n -діаграм (відносно дії циклічної групи порядку $2n$ та дієдральної групи порядку $4n$) займалась ціла низка відомих математиків: T.R.S. Walsh, A.V. Lehman, J. Riordan, J. Harer, D. Zagier. Серед сучасників слід виділити авторів робіт [7], [2], [8], [5], [1].

Задачі про підрахунок числа неізоморфних та нееквівалентних n -діаграм були повністю розв'язані у 1997–1998 рр. в роботах [2], [5], [7], [8].

Явні формули для підрахунку числа неізоморфних *планарних* (роду 0), *тороїдальних* (роду 1) n -діаграм та $2m$ -діаграм *максимального роду* m було встановлено у 2000 р. в роботі [2]. Причому задача про підрахунок числа нееквівалентних діаграм *максимального роду* була повністю розв'язана лише у 2017 р. в роботі [6].

Слід констатувати, що *одержання явних формул для підрахунку числа неізоморфних (а тому і нееквівалентних)*, зокрема двокольорових, n -діаграм *фіксованого роду* виявилось досить складною задачею і в загальному випадку до сьогодні *нерозв'язаною проблемою*.

Для **двокольорових** діаграм найбільш вагомими є наступні результати: задачі про підрахунок числа неізоморфних та нееквівалентних O - і N -діаграм (відповідно) повністю розв'язано в 2010 р. у роботі [11];

формули для підрахунку числа неізоморфних та нееквівалентних O -діаграм (N -діаграм), які мають *точно один цикл певного кольору* (чорний або ж сірий) одержано в 2010 та 2012 рр. у роботах [12] і [13] відповідно;

формули для підрахунку числа неізоморфних та нееквівалентних *планарних* O -діаграм (з n хордами) було встановлено у 2000 р. в роботі [1]; проте питання про узагальнення цієї задачі на випадок фіксованого числа чорних (або ж сірих) циклів було повністю розв'язано лише у 2014 р. в роботі [14];

задача про підрахунок числа неізоморфних O -діаграм *максимального роду* (з 1-им чорним та 1-им сірим циклом) була розв'язана у 2006 р. в роботі [10], а про число нееквівалентних таких діаграм — лише у 2015 р. в [15].

Слід зазначити, що навіть для класу $\mathfrak{S}_{k;l}^{n,1}$ O -діаграм (з n хордами) роду 1, які мають *точно* k чорних (або ж сірих) та $l = n - k - 1$ сірих (відповідно чорних) циклів, питання про підрахунок числа нееквівалентних діаграм відносно дії циклічної та дієдральної груп в загальному випадку **залишаються відкритими**. Явні формули для підрахунку числа неізоморфних та нееквівалентних діаграм з класів $\mathfrak{S}_{n-2;1}^{n,1}$, $\mathfrak{S}_{n-3;2}^{n,1}$ та $\mathfrak{S}_{n-4;3}^{n,1}$ (для початкових $l = 1$, $l = 2$ та $l = 3$) одержано в роботах [16], [17] і [18] відповідно.

Явні формули для підрахунку числа неізоморфних діаграм з більш ємного класу $\mathfrak{S}^{n,1}$ двокольорових хордових O -діаграм (з n хордами) роду 1 (без фіксації кількості чорних та/або сірих циклів) анонсовано в одній з робіт автора. Проте задача про підрахунок числа *нееквівалентних* діаграм з класу $\mathfrak{S}^{n,1}$ також залишається *нерозв'язаною*.

Дана стаття є логічним продовженням зазначеної серії робіт, зокрема [19], та присвячена встановленню формул для підрахунку числа нееквівалентних діаграм з класу $\mathfrak{S}_{n-4;1}^{n,2}$. А її основною метою — виклад одержаних результатів, анонсованих автором в роботі [20].

Основні поняття та попередні відомості

Означення 1. Коло з $2n$ точками на ньому (що є вершинами правильного $2n$ -кутника), дуги якого по чергово розфарбовані у два кольори (чорний і сірий) та фіксованою нумерацією вершин за годинниковою стрілкою, будемо називати двокольоровим $2n$ -шаблоном — рис. 1 а).

2-кольоровою хордовою n -діаграмою будемо називати n -діаграму, побудовану на основі двокольорового $2n$ -шаблону.

Означення 2. 2-кольорову n -діаграму, яка не містить (містить) хорди, що сполучає вершини з номерами однакової парності, називають O -діаграмою (N -діаграмою) — рис. 1 с), b).

Означення 3. «Чорним» («сірим») циклом 2-кольорової діаграми називатимемо послідовність хорд та чорних (сірих) дуг, які утворюють гомеоморфний образ (орієнтованого) кола — рис. 1 b) — с).

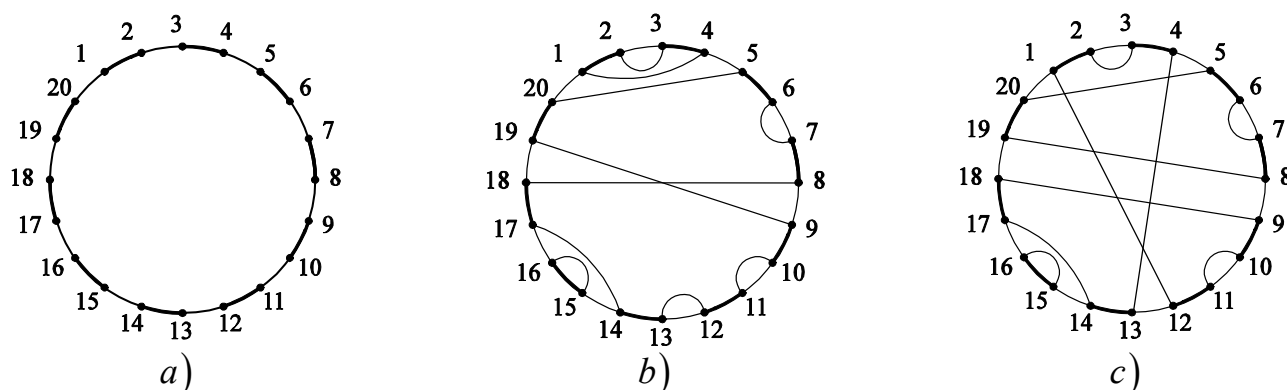


Рис. 1:

- a) двокольоровий 20-шаблон;
- b) N -діаграма (з 10 хордами), яка має 7 сірих та 3 чорних циклів;
- c) O -діаграма (з 10 хордами), яка має 6 сірих та 3 чорних циклів

Якщо проігнорувати колір, то кожен чорний (сірий) цикл 2-кольорової O -діаграми співпадає з відповідним циклом непофарбованої діаграми. Тоді наслідуючи [2], природнім чином визначається рід O -діаграми, а саме

Означення 4. Родом 2-кольорової O -діаграми будемо називати ціле число g , яке визначається рівністю

$$g = \frac{n + 1 - \lambda}{2}, \quad (1)$$

де λ — сумарне число чорних і сірих циклів діаграми.

Означення 5. Множину O -діаграм з n хордами (побудованих на 2-кольоровому $2n$ -шаблоні), які мають точно l сірих (чорних) та k чорних (сірих) циклів будемо позначати $\mathfrak{S}_{k,l;n}^O$.

Зауваження 1. З урахуванням рівності (1) та введених позначень, діаграми з класу $\mathfrak{S}_{k,l;n}^O$ є O -діаграмами (з n хордами) роду $g = \frac{n+1-k-l}{2}$. Тобто, для O -діаграм роду g з l сірими (або ж чорними) циклами число k чорних (відповідно сірих) циклів визначається однозначно і становить $k = n + 1 - l - 2g$.

Тому в подальшому через $\mathfrak{S}_{n+1-l-2g,l}^{n,g}$ будемо позначати клас двокольорових хордових саме O -діаграм (з n хордами) роду g , які мають точно l сірих та $k = n + 1 - l - 2g$ чорних циклів.

Більш детально з основними поняттями та попередніми відомостями з теорії переліку двокольорових хордових діаграм, можна ознайомитися в роботах [11], [16], [17].

1.1. Число діаграм з класу $\mathfrak{S}_{n-4;1}^{n,2}$ та його характеристичні підкласи

У 1997 р. в роботі [9, С. 4] вперше встановлено рекурентні формули, за допомогою яких є принципово можливим підрахунок числа діаграм з класу $\mathfrak{S}_{k,l}^{n,g}$ ($2g = n + 1 - k - l$).

Крім того, для початкових $g = 0; 1; 2; 3$ в [9, С. 8-9] встановлено явні формули, які пізніше також були одержані та уточнені й в [4, С. 833], а в роботі [3, С. 888] — для цілих $g \geq 0$ запропоновано іншу рекурентну формулу.

З урахуванням, наприклад результатів роботи [19], для довільного натурального $n \geq 5$ число $d(n)$ діаграм з класу $\mathfrak{S}_{n-4;1}^{n,2}$ можна знайти за формулою

$$\left| \mathfrak{S}_{n-4;1}^{n,2} \right| = \frac{(3n^2 - n - 6)}{8} \cdot C_{n+1}^6 = d(n). \quad (2)$$

Зауваження 2. ([19]) Оскільки діаграми з класу $\mathfrak{S}_{n-4;1}^{n,2}$ (крім 1 сірого циклу) мають точно $k = n - 4$ чорних циклів (які містять всі n чорних дуг двокольорового $2n$ -шаблону), то кожна з таких діаграм може мати лише один з наступних наборів чорних циклів:

- або один 5-цикл (довжини 5) та $(n - 5)$ 1-циклів (довжини 1);
- або один 4-цикл, один 2-цикл та $(n - 6)$ 1-циклів;
- або два 3-цикли та $(n - 6)$ 1-циклів;
- або один 3-цикл, два 2-цикли та $(n - 7)$ 1-циклів;
- або чотири 2-цикли та $(n - 8)$ 1-циклів.

Таким чином, всі діаграми з класу $\mathfrak{S}_{n-4;1}^{n,2}$ умовно можна поділити на n' ять зазначених вище класів — A, B, D, E та F відповідно.

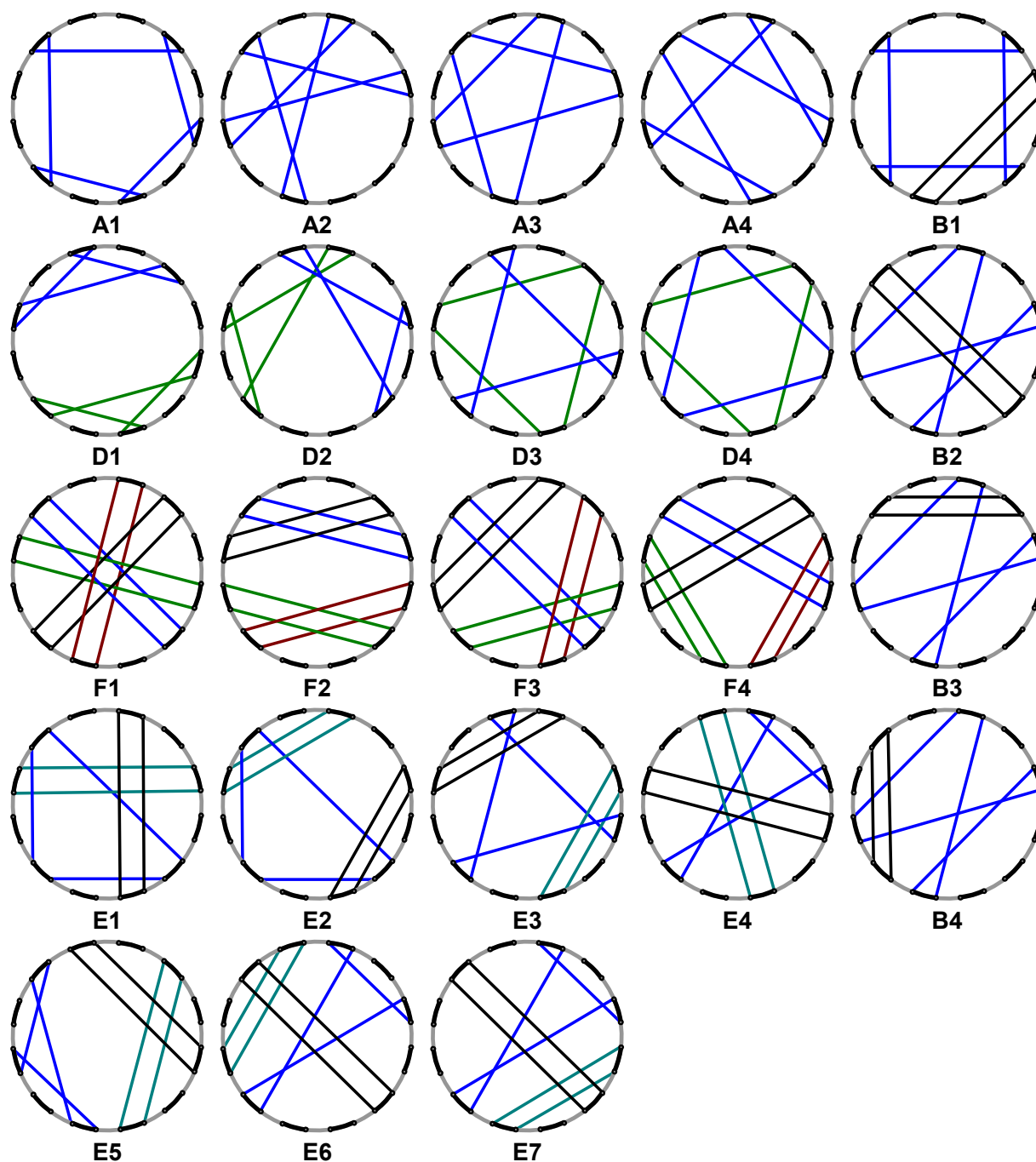


Рис. 2: типові представники характеристичних підкласів діаграм з класу $\mathfrak{S}_{n-4;1}^{n,2}$

Зауваження 3. ([19]) Якісний аналіз можливих типів діаграм із класів A , B , D , E і F дозволяє виділити лише 23 підкласи (об'єднання яких дає $\mathfrak{S}_{n-4;1}^{n,2}$ та перетин будь-яких двох із них є порожньою множиною), типові представники яких зображено на рис. 2 та (заради зручності) позначено у спосіб: $A1 - A4$, $B1 - B4$, $D1 - D4$, $E1 - E7$ та $F1 - F4$ відповідно.

1.2. Число неізоморфних діаграм з класу $\mathfrak{S}_{n-4;1}^{n,2}$

В роботі [19] за допомогою леми Бернсайда встановлено справедливість наступного твердження

Теорема 1. ([19]) *Для натуральних $n \geq 5$ число $d^*(n)$ неізоморфних (нееквівалентних відносно дії циклічної групи порядку n) діаграм з класу $\mathfrak{S}_{n-4;1}^{n,2}$ можна обчислити за формулою*

$$d^*(n) = \frac{d(n) + \rho(n, \frac{n}{2}) + 2\rho(n, \frac{n}{3}) + 2\rho(n, \frac{n}{4}) + 4\rho(n, \frac{n}{5}) + 2\rho(n, \frac{n}{6}) + 4\rho(n, \frac{n}{8})}{n}, \quad (3)$$

де

$$d(n) = \frac{1}{8} \cdot C_{n+1}^6 \cdot (3n^2 - n - 6); \quad (4)$$

$\forall j \in N : \frac{n}{j} \notin N$ величини $\rho\left(n, \frac{n}{j}\right) \equiv 0$, а

$\forall j \in \{2; 3; 4; 5; 6; 8\} : \frac{n}{j} \in N$ величини $\rho\left(n, \frac{n}{j}\right)$ визначаються за допомогою співвідношень

$$\rho\left(n, \frac{n}{j}\right) = \begin{cases} C_{\frac{n}{8}}^1, & j = 8 \\ C_{\frac{n}{6}}^1, & j = 6 \\ 3 \cdot C_{\frac{n}{5}}^1, & j = 5 \\ C_{\frac{n}{4}}^2, & j = 4 \\ 3 \cdot C_{\frac{n}{3}}^2, & j = 3 \\ C_{\frac{n}{2}}^3 \cdot \frac{5n+2}{8}, & j = 2. \end{cases} \quad (5)$$

Основна частина

Застосовуючи лему Бернсайда (див. напр. [2], [11], [12]), не важко встановити, що число $d^{**}(n)$ нееквівалентних (відносно дії дієдральної групи) діаграм з класу $\mathfrak{S}_{n-4;1}^{n,2}$ можна визначити за допомогою співвідношення

$$d_n^{**} = \frac{1}{2} (d^*(n) + S(n)), \quad (6)$$

де $d^*(n)$ — число неізоморфних діаграм з класу $\mathfrak{S}_{n-4;1}^{n,2}$,

$$S(n) = \begin{cases} s_0(n), & n = 2m + 1 \\ \frac{1}{2}(s_1(n) + s_2(n)), & n = 2m, \end{cases} \quad (7)$$

$s_0(n)$ — число тих діаграм з класу $\mathfrak{S}_{n-4;1}^{n,2}$, що є симетричними відносно **фіксованої осі симетрії**, яка проходить через середини протилежних чорної та сірої дуг 2-кольорового $2n$ -шаблону;

$s_1(n)$ ($s_2(n)$) — число тих діаграм з класу $\mathfrak{S}_{n-4;1}^{n,2}$, що є симетричними відносно **фіксованої осі симетрії**, яка проходить через середини протилежних сірих (відповідно чорних) дуг 2-кольорового $2n$ -шаблону.

Таким чином, з урахуванням співвідношень (6), (7) та встановлених формул (3) – (5) для обчислення величини $d^*(n)$, задача про підрахунок числа $d^{**}(n)$ нееквівалентних діаграм з класу $\mathfrak{S}_{n-4;1}^{n,2}$ зводиться до задач про підрахунок величин $s_0(n)$, $s_1(n)$, $s_2(n)$.

Зауваження 4. В подальшому з метою уникнення непотрібних нагромаджень (при візуалізації відповідних типів діаграм) чорні 1-цикли будемо зображати у вигляді звичайної чорної дуги $2n$ -шаблону (та розуміти як дугу, кінці якої сполучено хордою) – рис. 3 с).

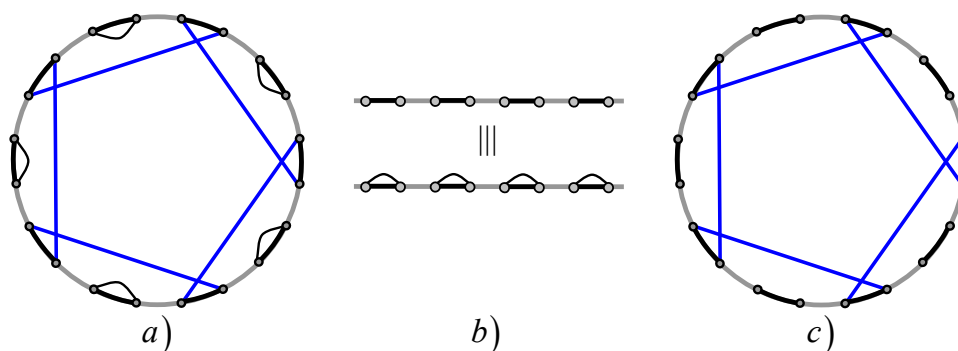


Рис. 3: до зауваження 4.

Лема 1. Нехай $n = 2t + 1$. Тоді число $s_0(n)$ діаграм з класу $\mathfrak{S}_{n-4;1}^{n,2}$, що є симетричними відносно фіксованої осі симетрії, яка проходить через середини протилежних чорної та сірої дуг 2-кольорового $2n$ -шаблону, можна обчислити за формулою.

$$s_0(n) = \frac{(n - 3)(n - 1)(n + 1)(5n + 7)}{384}. \tag{8}$$

Доведення. З урахуванням аналізу симетрій типових представників характеристичних підкласів діаграм з класу $\mathfrak{S}_{n-4;1}^{n,2}$ (зображених на рис. 2), всі діаграми з класу $\mathfrak{S}_{n-4;1}^{n,2}$, що є симетричними відносно фіксованої осі симетрії, яка проходить через середини протилежних **чорної та сірої** дуг 2-кольорового $2n$ -шаблону ($n = 2t + 1$), вичерпуються діаграмами вісімнадцяти типів, зображених та занумерованих числами від 1 до 18 на рис. 4.

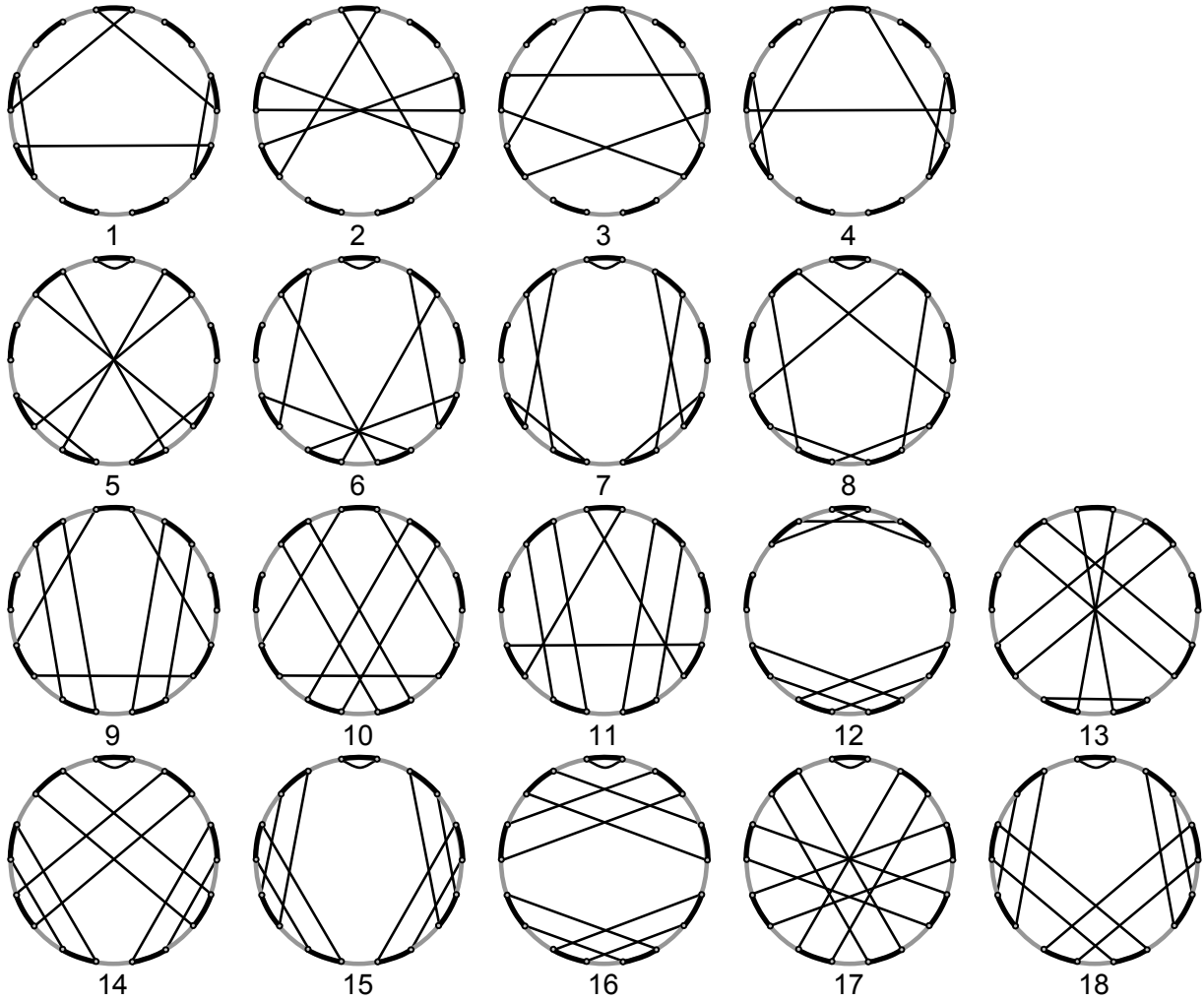


Рис. 4: до леми 1.

Оскільки $n = 2m + 1$, то сумарне число $s_0(n)$ діаграм зазначених типів становить

$$\begin{aligned}
 & 4 \times C_{\frac{(2m+1)-1}{2}}^2 + 9 \times C_{\frac{(2m+1)-1}{2}}^3 + 5 \times C_{\frac{(2m+1)-1}{2}}^4 = 4C_m^2 + 9C_m^3 + 5C_m^4 = \\
 & = 4(C_m^2 + C_m^3) + 5(C_m^3 + C_m^4) = 4C_{m+1}^3 + 5C_{m+1}^4 = 4C_{m+2}^4 + C_{m+1}^4 = \\
 & = 4 \frac{(m+2)!}{4!(m-2)!} + \frac{(m+1)!}{4!(m-3)!} = \frac{(m+1)!}{4!(m-2)!} (4 \cdot (m+2) + 1 \cdot (m-2)) = \\
 & = \frac{1}{4!} (m+1)m(m-1)(5m+6).
 \end{aligned}$$

Звідки, з урахуванням рівності $m = \frac{n-1}{2}$, одержуємо, що

$$s_0(n) = s_0(2m+1) = \frac{(n-3)(n-1)(n+1)(5n+7)}{384}.$$

□

Лема 2. Нехай $n = 2m$. Тоді мають місце рівності

$$s_1(n) = \frac{1}{384}(n-4)(n-2)(5n^2+2n); \quad (9)$$

$$s_2(n) = \frac{1}{384}(n-4)(n-2)(5n^2+66n+192); \quad (10)$$

$$\frac{1}{2}(s_1(n) + s_2(n)) = \frac{(n-4)(n-2)(5n^2+34n+96)}{384}. \quad (11)$$

Доведення. З урахуванням аналізу симетрій типових представників характеристичних підкласів діаграм з класу $\mathfrak{S}_{n-4;1}^{n,2}$ (зображених на рис. 2), всі діаграми з класу $\mathfrak{S}_{n-4;1}^{n,2}$, що є симетричними відносно фіксованої осі симетрії, яка проходить через середини протилежних **сірих** дуг 2-кольорового $2n$ -шаблону ($n = 2m$), вичерпуються діаграмами дев'яти типів, зображених та занумерованих числами від 1 до 9 на рис. 5.

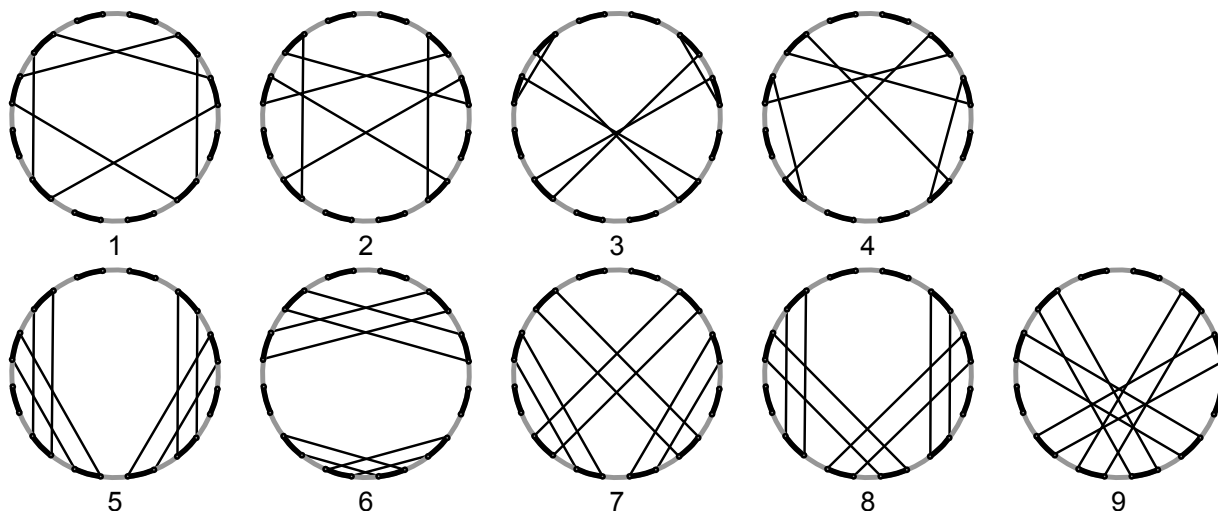


Рис. 5: до лема 2.

Оскільки $n = 2m$, то сумарне число $s_1(n)$ діаграм зазначених типів становить

$$\begin{aligned} 4 \times C_{\frac{2m}{2}}^3 + 5 \times C_{\frac{2m}{2}}^4 &= 4C_m^3 + 5C_m^4 = 4(C_m^3 + C_m^4) + C_m^4 = 4C_{m+1}^4 + C_m^4 = \\ &= 4 \frac{(m+1)!}{4!(m-3)!} + \frac{m!}{4!(m-4)!} = \frac{m!}{4!(m-3)!} (4 \cdot (m+1) + 1 \cdot (m-3)) = \\ &= \frac{1}{4!} m(m-1)(m-2)(5m+1). \end{aligned}$$

Звідки, з урахуванням рівності $m = \frac{n}{2}$, одержуємо, що

$$s_1(n) = s_1(2m) = \frac{n(n-2)(n-4)(5n+2)}{384} = \frac{1}{384}(n-4)(n-2)(5n^2+2n).$$

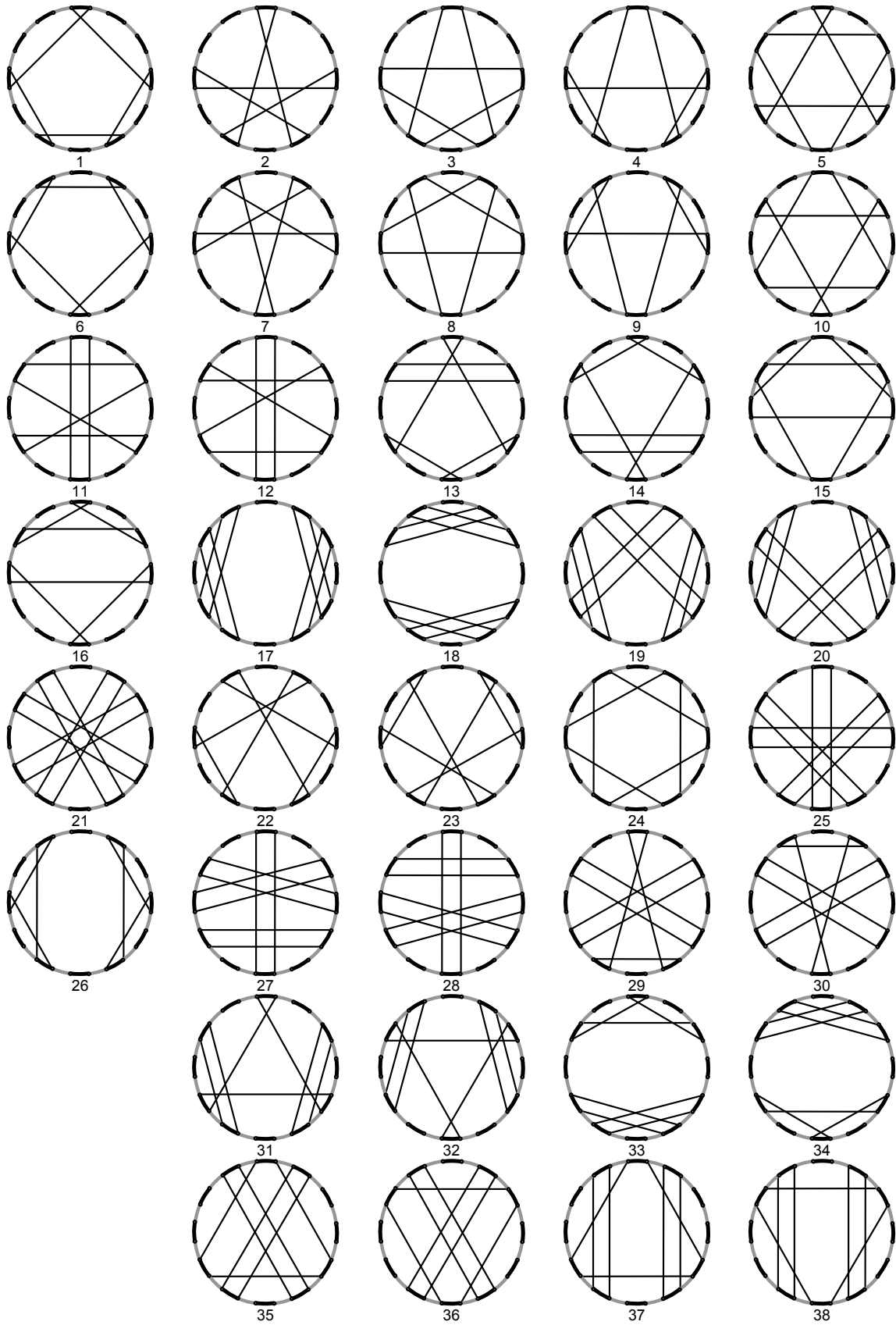


Рис. 6: до лемми 2.

Діаграми з класу $\mathfrak{S}_{n-4;1}^{n,2}$, що є симетричними відносно фіксованої осі симетрії, яка проходить через середини протилежних **чорних** дуг 2-кольорового $2n$ -шаблону ($n = 2m$), вичерпуються діаграмами тридцяти восьми типів, зображених та занумерованих числами від 1 до 38 на рис. 6.

Оскільки $n = 2m$, то сумарне число $s_2(n)$ діаграм зазначених типів становить

$$\begin{aligned} & 16 \times C_{\frac{2m-2}{2}}^2 + 5 \times C_{\frac{2m-2}{2}}^4 + 17 \times C_{\frac{2m-2}{2}}^3 = 16C_{m-1}^2 + 5C_{m-1}^4 + 17C_{m-1}^3 = \\ & = 16(C_{m-1}^2 + C_{m-1}^3) + (C_{m-1}^3 + C_{m-1}^4) + 4C_{m-1}^4 = 16C_m^3 + C_m^4 + 4C_{m-1}^4 = \\ & = 16 \cdot \frac{m!}{3!(m-3)!} + \frac{m!}{4!(m-4)!} + 4 \cdot \frac{(m-1)!}{4!(m-5)!} = \\ & = \frac{(m-1)!}{4!(m-3)!} (64 \cdot m + 1 \cdot m(m-3) + 4 \cdot (m-3)(m-4)) = \\ & = \frac{(m-1)(m-2)}{4!} (5m^2 + 33m + 48). \end{aligned}$$

Звідки, з урахуванням рівності $m = \frac{n}{2}$, одержуємо, що

$$\begin{aligned} s_2(n) &= \frac{1}{4!} \binom{n-2}{2} \binom{n-4}{2} \left(5 \cdot \frac{n^2}{4} + 33 \cdot \frac{n}{2} + 48 \right) = \\ &= \frac{1}{384} (n-4)(n-2) (5n^2 + 66n + 192). \end{aligned}$$

Крім того,

$$\frac{1}{2} (s_1(n) + s_2(n)) = \frac{(n-4)(n-2) (5n^2 + 34n + 96)}{384}.$$

□

З урахуванням співвідношень (6), (7) та лем 1 і 2, має місце

Теорема 2. Для натуральних $n \geq 5$ число $d^{**}(n)$ нееквівалентних (відносно дії дієдральної групи порядку $2n$) діаграм з класу $\mathfrak{S}_{n-4;1}^{n,2}$ можна обчислити за формулою

$$d^{**}(n) = \frac{1}{2} (d^*(n) + S(n)), \quad (12)$$

де

$$S(n) = \begin{cases} \frac{1}{384} (n-3)(n-1)(n+1)(5n+7), & n = 2k+1 \\ \frac{1}{384} (n-4)(n-2) (5n^2 + 34n + 96), & n = 2k. \end{cases} \quad (13)$$

а величина $d^*(n)$ визначається за формулами (3) – (5).

На рис. 7 та 8 в явному вигляді наведено всі неізоморфні (нееквівалентні відносно дії циклічної групи) діаграми з класів $\mathfrak{S}_{1;1}^{5,2}$ та $\mathfrak{S}_{2;1}^{6,2}$ відповідно.

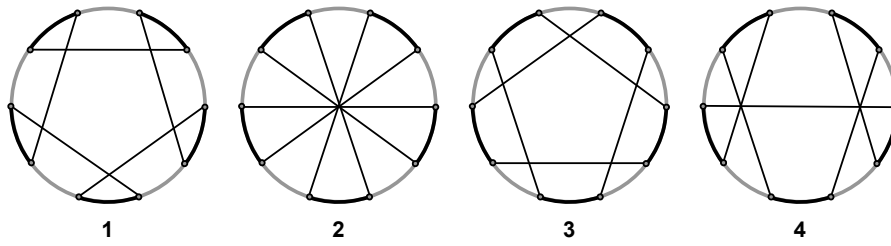


Рис. 7: всі неізоморфні діаграми з класу $\mathfrak{S}_{1;1}^{5,2}$

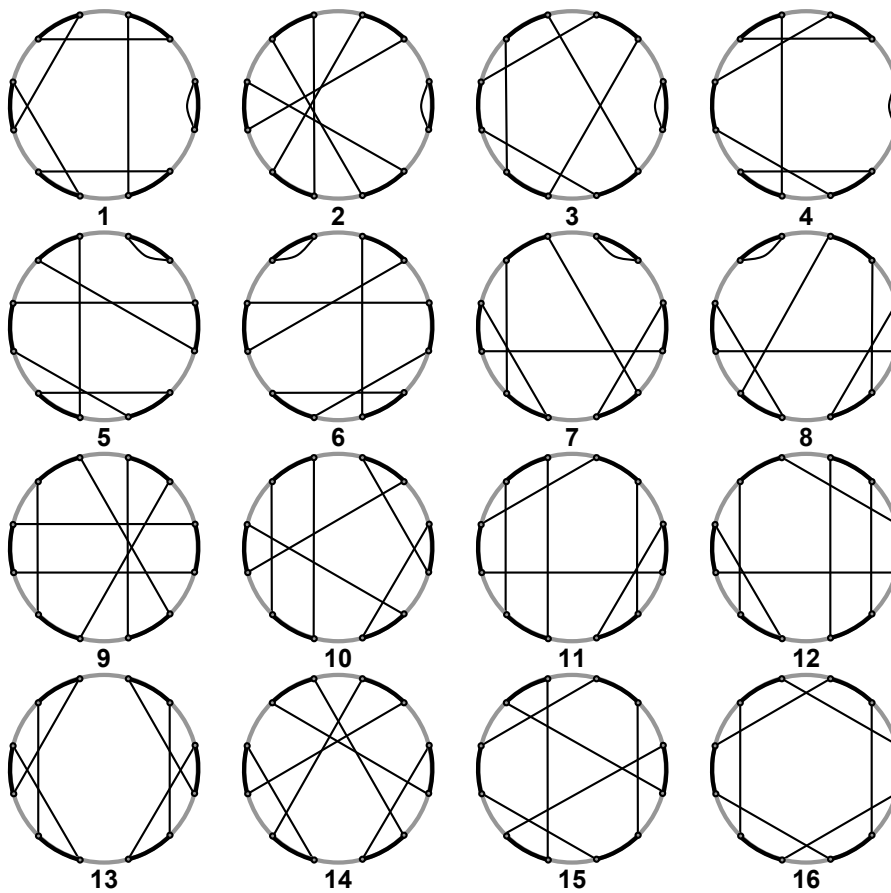


Рис. 8: всі неізоморфні діаграми з класу $\mathfrak{S}_{2;1}^{6,2}$

Зауваження 5. Очевидно, що:

у випадку $n = 5$ всі неізоморфні діаграми є також і нееквівалентними (відносно дії дієдральної групи);

у випадку $n = 6$ з 16 неізоморфних діаграм пари $\{5;6\}$, $\{7;8\}$ та $\{11;12\}$ є еквівалентними (симетричними), а тому існує лише $16 - 3 = 13$ нееквівалентних діаграм з класу $\mathfrak{S}_{2;1}^{6,2}$.

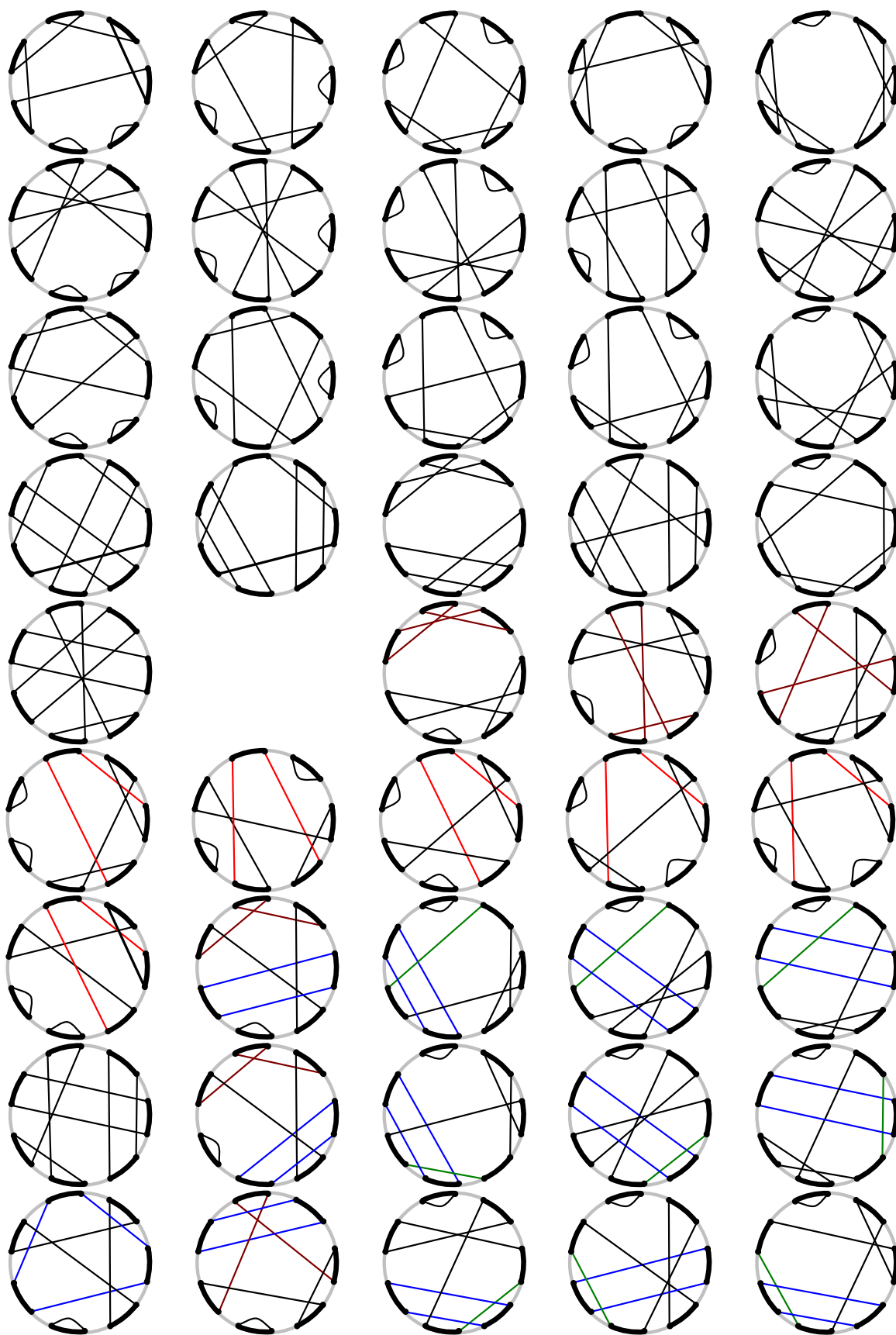


Рис. 9: всі 44 нееквівалентні діаграми з класу $\mathfrak{S}_{3;1}^{7,2}$

Додатки та прикінцеві зауваження

Зауваження 6. За допомогою одержаних формул можна підрахувати й число нееквівалентних діаграм з класу $\mathfrak{S}_{1;n-4}^{n,2}$

Повторюючи міркування, аналогічні тим, що наведено у роботі [5], не важко встановити справедливості наступного твердження

Твердження 1. При $n \rightarrow \infty$ величини $d^{**}(n)$ та

$$\delta(n) = \frac{d(n)}{2n} = \frac{(3n^2 - n - 6)(n + 1)(n - 1)(n - 2)(n - 3)(n - 4)}{11520}$$

є еквівалентними нескінченно великими величинами.

| n | $d(n)$ | $d^*(n)$ | $d^{**}(n)$ | n | $d(n)$ | $d^*(n)$ | $d^{**}(n)$ |
|-----------|-----------|----------|-------------|-----------|---------------|------------|-------------|
| 5 | 8 | 4 | 4 | 21 | 12 087 306 | 575 592 | 288 951 |
| 6 | 84 | 16 | 13 | 22 | 17 968 566 | 816 858 | 409 959 |
| 7 | 469 | 67 | 44 | 23 | 26 212 571 | 1 139 677 | 571 516 |
| 8 | 1 869 | 237 | 140 | 24 | 37 589 475 | 1 566 377 | 785 361 |
| 9 | 5 985 | 667 | 366 | 25 | 53 068 015 | 2 122 723 | 1 063 721 |
| 10 | 16 401 | 1 649 | 883 | 26 | 73 854 495 | 2 840 739 | 1 423 367 |
| 11 | 39 963 | 3 633 | 1 894 | 27 | 101 437 245 | 3 756 943 | 1 881 702 |
| 12 | 88 803 | 7 417 | 3 836 | 28 | 137 637 045 | 4 915 841 | 2 461 957 |
| 13 | 183 183 | 14 091 | 7 203 | 29 | 184 664 025 | 6 367 725 | 3 188 185 |
| 14 | 355 355 | 25 405 | 12 945 | 30 | 245 181 573 | 8 173 019 | 4 091 833 |
| 15 | 654 654 | 43 650 | 22 112 | 31 | 322 377 804 | 10 399 284 | 5 205 312 |
| 16 | 1 154 062 | 72 166 | 36 503 | 32 | 420 045 164 | 13 126 768 | 6 570 279 |
| 17 | 1 958 502 | 115 206 | 58 086 | 33 | 542 668 764 | 16 444 518 | 8 229 569 |
| 18 | 3 215 142 | 178 678 | 90 018 | 34 | 695 524 060 | 20 457 020 | 10 237 300 |
| 19 | 5 126 010 | 269 790 | 135 660 | 35 | 884 784 516 | 25 279 560 | 12 649 062 |
| 20 | 7 963 242 | 398 242 | 200 162 | 36 | 1 117 639 908 | 31 046 082 | 15 534 091 |

Табл. 1: початкові значення величин $d(n)$, $d^*(n)$ та $d^{**}(n)$

Висновки

Таким чином, в представленій роботі розв'язано задачу про підрахунок числа нееквівалентних діаграм з класу $\mathfrak{S}_{n-4;1}^{n,2}$. Крім того, для $n = 5, 6$ та $n = 7$ в явному вигляді наведено всі неізоморфні та нееквівалентні діаграми з відповідних класів, а для $5 \leq n \leq 36$ — точні значення числа неізоморфних та нееквівалентних таких діаграм.

Цілком природно подальшу роботу спрямувати на одержання явних формул для підрахунок числа нееквівалентних діаграм з класу $\mathfrak{S}_{n-6;1}^{n,3}$ та узагальнення одержаних результатів для класу $\mathfrak{S}_{n-2g,1}^{n,g}$ на випадок довільного $g \geq 1$.

Література

1. *Callan D., Smiley L.* Noncrossing partitions under reflection and rotation; preprint, arXiv:math/0510447 [math.CO], 2000.
2. *Cori R., Marcus M.* Counting non-isomorphic chord diagrams. Theoretical Computer Science. 1998. Vol. 204. P. 55–73.
3. *Chapuy G.* A new combinatorial identity for unicellular maps, via a direct bijective approach. Advances in Applied Mathematics. 2011. Vol. 47, No. 4. P. 874–893.
4. *Goupil A., Schaeffer G.* Factoring n -cycles and counting maps of given genus. European Journal of Combinatorics. 1998. Vol. 19, No. 7. P. 819–834.
5. *Khruzin A.* Enumeration of chord diagrams; preprint, arXiv:math/0008209 [math.CO], 1998.
6. *Krasko E.* Counting Unlabelled Chord Diagrams of Maximal Genus; preprint, arXiv:1709.00796 [math.CO], 2017.
7. *Li B., Sun H.* Exact number of chord diagrams and an estimation of the number of spine diagrams of order n . Chinese Science Bulletin. 1997. Vol. 42, No. 9. P. 705–720.
8. *Stoimenov A.* Enumeration of chord diagrams and an upper bound for Vassiliev invariants. Journal of Knot and its Ramifications. 1998. Vol. 7, No. 1. P. 93–114.
9. *Адрианов Н.М.* Аналог формулы Харера-Цагира для одноклеточных двукрашенных карт. Функциональный анализ и его приложения. 1997. Том 31, № 3. С. 1–9.
10. *Кадубовський О.* Про один клас хордових діаграм максимального роду. Вісник Київського університету Серія: фізико-математичні науки. 2006. Вип. 1. С. 17–27.
11. *Кадубовський О.А., Сторожилова О.В., Сторожилова Н.В.* Двокольорові O - і N -діаграми. Пошуки і знахідки. Серія: фізико-математичні науки. 2010. Том I, Вип. 10. С. 41–50.
12. *Кадубовський О.А., Саприкіна Ю.С., Мазур С.Ю.* Двокольорові O -діаграми з одним чорним циклом. Пошуки і знахідки. Серія: фізико-математичні науки. 2010. Том I, Вип. 10. С. 51–60.
13. *Кадубовский А.А.* Двухцветные хордовые N -диаграммы с одним черным циклом. Труды института прикладной математики и механики НАН Украины. 2012. Том 24. С. 134–146.
14. *Кадубовский А.А.* О числе топологически неэквивалентных функций с одной вырожденной критической точкой типа седло на двумерной сфере, II. Труды междунар. геометрического центра. 2015. Том 8, № 1. С. 46–61.

15. Кадубовський О.А. Перерахування топологічно нееквівалентних гладких мінімальних функцій на замкнених поверхнях // Топологія відображень маловимірних многовидів : Збірник праць Інституту математики НАН України. 2015. Том 12, № 6. С. 105–145.
16. Кадубовський О.А., Баляса Н.П. Перерахування двокольорових хордових O -діаграм роду 1, які мають один чорний (або сірий) цикл, відносно дії циклічної та дієдральної груп. Збірник наукових праць фізико-математичного факультету ДДПУ. 2016. Вип. 6. С. 31–46.
17. Кадубовський О.А., Калініченко Я.В. Перерахування двокольорових хордових O -діаграм роду 1, які мають два чорних (або сірих) циклів, відносно дії групи дієдра. Збірник наукових праць фізико-математичного факультету ДДПУ. 2018. Вип. 8. С. 30–45.
18. Кадубовський О.А. Перерахування двокольорових хордових O -діаграм роду 1, які мають три сірих (або чорних) цикли, відносно дії групи дієдра. Збірник наукових праць фізико-математичного факультету ДДПУ. 2019. Вип. 9. С. 25–41.
19. Кадубовський О.А., Сипчук Є.Ю. Про число неізоморфних двокольорових хордових O -діаграм роду 2, які мають один сірий (або чорний) цикл. Збірник наукових праць фізико-математичного факультету ДДПУ. 2020. Вип. 10. С. 21–32.
20. Кадубовський О.А. Про число топологічно нееквівалентних напівмінімальних гладких функцій на двовимірному кренделі. Збірник тез доповідей Міжнародної наукової онлайн конференції «Алгебраїчні та геометричні методи аналізу». (Одеса, 26-30 травня 2020 р.). — Одеса, 2020. — С. 87–88. — 131 с.

О.А. Kadubovskyi, A.V. Stopkin, A.M. Kyrychenko

Donbas State Pedagogical University, Sloviansk, Ukraine.

On the number of non-equivalent 2-color chord O -diagrams of the genus three that have one grey (or black) face

In this paper we consider 2-color chord O -diagrams (of order n) with one grey and $(n - 4)$ black faces under the action of dihedral group of the order $2n$.

For natural 5, 6 and 7 we have illustrated all non-equivalent of such diagrams. We have established explicit formulas for counting the number of non-equivalent diagrams from the specified class. In addition, for natural $5 \leq n \leq 36$ we have also listed the exact value of the number of non-equivalent such diagrams.

Keywords: 2-color chord O -diagrams, genus of a diagram, faces of a diagram, dihedral group.