УДК 512.53

Величко В.Є.

[1] *канд. фіз-мат. наук, доктор пед. наук, професор каф. МНМ та МНІ, ДВНЗ «ДДПУ»*

e-mail: vladislav.velichko@gmail.com, ORCID 0000-0001-9752-0907

ЕНДОМОРФІЗМИ ВІЛЬНОЇ ГРУПИ

В роботі за допомогою елементарного перетворення Нільсена рангу n на множені наборів слів вільної групи визначається автоморфізм або ендоморфізм вільної групи. Розглядається будова вербальної підгрупи вільної групи.

Ключові слова: *вільна група, ендоморфізм, автоморфізм, перетворення Нільсена*

Вступ

Вільною групою $F = F(X)$ з системою вільних твірних X називається група, елементами якої є нескоротні групові слова над алфавітом X, а добуток елементів-слів визначається як їх приписування з подальшою редукцією – скороченням символів вигляду xx^{-1}, $x^{-1}x$, які можуть появитися на стику двох слів при їх приписуванні. При цьому груповим словом називається слово вигляду

$$w = x_{i_1}^{\varepsilon_1} x_{i_2}^{\varepsilon_2} \dots x_{i_r}^{\varepsilon_r}, \text{ де } \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_r \in \{-1, 1\}.$$

Слово w називається нескоротним, якщо воно не містить складів вигляду xx^{-1} чи $x^{-1}x$. Потужність множини вільних твірних X називається рангом вільної групи. Вільна група визначається своїм рангом однозначно: будь яка інша система твірних, яка є вільною, тобто такою, що довільне відображення цієї системи в групу F продовжується до ендоморфізму, має таку ж потужність як і X. Це число є інваріантом вільної групи, який називається її рангом. Вільну групу рангу n (з точністю до ізоморфізму вона лише одна) позначають символом F_n.

Основна частина

Нехай $(x_i)_{i \in I}$ – система вільних твірних вільної групи F, де $I = \{1, 2, \dots, n\}$ або $I = N$, $(w_i)_{i \in I}$ – система нескоротних слів - елементів F. Тоді відображення

$$x_i \to w_i, \ i \in I, \tag{1}$$

можна продовжити до ендоморфізму групи F. При цьому різним відображенням відповідатимуть різні ендоморфізми і кожен ендоморфізм визначає певне відображення виду (1). А тому довільний ендоморфізм $\alpha \in EndF$

однозначно задається набором елементів $(w_i)_{i\in I}$. Нехай n – натуральне число, $n \geqslant 2$, тоді ендоморфізму α відповідає набір

$$[\alpha] =< w_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), w_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, w_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) > \tag{2}$$

Якщо ендоморфізму β відповідає набір

$$[\beta] =< w'_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), w'_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, w'_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) >, \tag{3}$$

то добутку $\alpha\beta$ відповідає набір, який утворився при суперпозиції (2) і (3), тобто

$$\begin{aligned}[\alpha] \cdot [\beta] = [\alpha\beta] =< w'_1(w_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, w_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)), \ldots \\ \ldots, w'_n(w_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, w_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)) >\end{aligned} \tag{4}$$

Відповідності (1) називаються (див. [1], с.138) підстановками на твірних x_i, або просто підстановками. Якщо множина слів $\{w_i | i \in I\}$ вільно породжує вільну групу F, то підстановка називається вільною підстановкою на твірних x_i, $i \in I$. Вільні підстановки визначають автоморфізми вільної групи F, а всі інші – ендоморфізми, які не являються автоморфізмами. Пересвідчитись чи є підстановка $[\alpha]$ на твірних x_i вільною чи ні можна використовуючи так звані елементарні перетворення над словами вільної групи. Вони визначаються таким чином.

Означення 1. *Елементарними перетвореннями Нільсена рангу n називаються перетворення на множині наборів (інакше – кортежів)*

$$[\alpha] =< w_1, w_2, \ldots, w_n >$$

нескоротних слів в алфавіті X, які належать до одного з таких типів:

1) *Перестановка слів у наборі. Нехай σ – деяка перестановка з симетричної групи S_n. Тоді елементарним σ-перетворенням кортежа $[\alpha]$ називається таке його перетворення*

$$(w_1, w_2, \ldots, w_n) \xrightarrow{\sigma} (w_{\sigma(1)}, w_{\sigma(2)}, \ldots, w_{\sigma(n)}) \tag{5}$$

   Образ кортежа $[\alpha]$ при перетворенні (5) позначатимемо символом $[\alpha]^\sigma$.

2) *Заміна компонент кортежа на обернені елементи вільної групи. Нехай $\overline{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ – деякий вектор, координати якого належать до множини $\{1, -1\}$. a-перетворенням кортежа $[\alpha]$ назвемо перетворення вигляду*

$$(w_1, w_2, \ldots, w_n) \to (w_1^{a_1}, w_2^{a_2}, \ldots, w_n^{a_n}). \tag{6}$$

   Образ кортежа $\overline{a}$ при перетворенні (6) позначатимемо символом $[\alpha]^{\overline{a}}$.

3) *Зміна компонент кортежа шляхом множення на інші компоненти. перетвореннями такого типу є наступні:*

а)

$$(w_1, \ldots, w_{i-1}, w_i, w_{i+1}, \ldots, w_n) \to$$
$$(w_1, \ldots, w_{i-1}, w_i \cdot w_j^{\varepsilon}, w_{i+1}, \ldots, w_n);$$

б)

$$(w_1, \ldots, w_{i-1}, w_i, w_{i+1}, \ldots, w_n) \to$$
$$(w_1, \ldots, w_{i-1}, w_j^{\varepsilon} \cdot w_i, w_{i+1}, \ldots, w_n); \tag{7}$$

в)

$$(w_1, \ldots, w_{i-1}, w_i, w_{i+1}, \ldots, w_n) \to$$
$$(w_1, \ldots, w_{i-1}, w_j^{\varepsilon} \cdot w_i \cdot w_j^{-\varepsilon}, w_{i+1}, \ldots, w_n),$$

де $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant n$, $i \neq j$, $\varepsilon \in \{1, -1\}$.

Якщо до набору $[\alpha] =< w_1, w_2, \ldots, w_n >$ застосувати нільсінєвське елементарне перетворення одного з типів 1)-3), то в результаті дістаємо новий кортеж, який породжує ту ж саму підгрупу групи SF, що й набір $[\alpha]$. Нехай $L_x(w)$ – число входжень літери x в слово w, $L_x([\alpha]) = L_x(w_1) + \ldots + L_x(w_n)$.

Лема 1. *Нехай* $[\alpha]$ *– деякий набір елементів вільної групи* F. *Можна побудувати таку послідовність* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ *нільсенівських елементарних перетворень кортежів довжини* n, *що для довільної літери* $x \in X$ *матимуть місце нерівності*

$$L_x([\alpha]) \geqslant L_x([\alpha]^{\lambda_1}) \geqslant L_x([\alpha]^{\lambda_1 \lambda_2}) \geqslant \ldots \geqslant L_x([\alpha]^{\lambda_1 \ldots \lambda_s}),$$

причому кортеж $[\beta] = [\alpha]^{\lambda_1 \ldots \lambda_s}$ *має вигляд*

$$[\beta] =< \widetilde{w_1}, \ldots, \widetilde{w}_l, e, \ldots, e >,$$

а $\widetilde{w_1}, \ldots, \widetilde{w}_l$ *є вільною системою твірних підгрупи* $< \widetilde{w_1}, \ldots, \widetilde{w}_l >$, *породженої* $\widetilde{w_1}, \widetilde{w_2}, \ldots, \widetilde{w}_l$. *Число* l *не залежить від вибору послідовності елементарних нільсеневських перетворень* $\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_s$.

Доведення цієї леми див. ([1], с.133-136.)

Число l, яке є інваріантом набору $[\alpha]$, називатимемо рангом цього набору і позначатимемо $r([\alpha])$. очевидно для довільного набору $[\alpha]$ неодиничних нескоротних слів справджується нерівності:

$$1 \leqslant r([\alpha]) \leqslant n.$$

З леми 1 як наслідок відразу ж дістаємо таке твердження

Лема 2. *Набір* $[\alpha]$ *задає автоморфізм вільної групи* $F(X)$ *тоді й лише тоді, коли* $r([\alpha]) = n$ *. В противному разі цей набір задає ендоморфізм групи* $F(X)$ *, який не буде її автоморфізмом.*

Д о в е д е н н я. Якщо $r([\alpha]) = n$, то за допомогою елементарних перетворень Нільсена $[\alpha]$ можна привести до вигляду $< \widetilde{w_1}, \widetilde{w_2}, \ldots, \widetilde{w_l} >$ такого, що $\widetilde{w_1}, \widetilde{w_2}, \ldots, \widetilde{w_l}$ є вільною системою твірних вільної групи $F(X)$. Звідси випливає, що й компоненти кортежа $[\alpha]$ породжують вільну групу $F(X)$. А тому відображення

$$f : x_i \to w_i,\ i = 1, 2, \ldots, n,$$

можна продовжити до автоморфізму $F(X)$ в себе. Якщо ж $r([\alpha]) = k < n$, то за допомогою елементарних перетворень Нільсена кортеж $[\alpha]$ можна привести до вигляду $< \widetilde{w_1}, \ldots, \widetilde{w_k}, e, \ldots, e >$. Але компоненти кортежа перетвореного і початкового породжують ту ж саму підгрупу рангу k в $F(X)$, тобто $< \widetilde{w_1}, \ldots, \widetilde{w_k} >=< w_1, \ldots, w_n >$ звідси випливає, що відображення f продовжується до гомоморфізму, який відображає $F(X)$ на власну підгрупу $< \widetilde{w_1}, \ldots, \widetilde{w_l} >$, який може бути автоморфізмом. □

Наведемо тепер визначення вербальної підгрупи в групі. Нехай G – довільна група, $\mathcal{V} \subset F$ – довільна множина слів у вільній групі зліченого рангу. Вербальною υ-підгрупою групи G називається підгрупа, що породжена всіма значеннями слів із $\mathcal{V}$ в групі G. Позначатимемо цю підгрупу символом $\upsilon(G)$. Таким чином

$$\upsilon(G) = \{\upsilon(g_1, g_2, \ldots, g_n) | \upsilon(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{V}, g_1, g_2, \ldots, g_n \in G\}$$

Вербальна підгрупа довільної групи G є цілком характеристичною в ній, обернене взагалі кажучи є неправильним, але для вільних груп маємо таке твердження

Лема 3. *Кожна цілком характеристична підгрупа вільної групи є вербальною в ній.*

Доведення див. [2].

Враховуючи це твердження, вербальну підгрупу $\mathcal{V}(X)$ вільної групи F, яка задається деяким словом υ можна охарактеризувати таким чином

Лема 4. *Нехай* $\upsilon(x_1, \ldots, x_n)$ *– деяке незвідне слово з вільної групи зліченного рангу,* F *– вільна група скінченного або зліченного рангу. Вербальна підгрупа* $\upsilon(F)$ *складається з найможливіших суперпозицій виду*

$$\upsilon(g_1, g_2, \ldots, g_n),\ g_1, g_2, \ldots, g_n \in F$$

Доведення випливає безпосередньо з визначення вербальної підгрупи.

Прикладами власних вербальних підгруп вільної групи F є

а) її комутант, який породжується словом $[x_1, x_2] = x_1^{-1}x_2^{-1}x_1x_2$ і складається з усіх незвідних слів, сума степенів всіх входжень кожної букви x_i в які дорівнює нулю;

б) члени ряду комутантів, які визначаються рекурентно рівностями $F^{(0)} = F$, $F^{(k)} = \{[u, v]|u, v \in F^{(k-1)}\}$, $k = 1, 2, \dots$;

в) члени нижнього центрального рядку, які визначаються рекурентно рівностями

$$\gamma_1(F) = F_1,\ \gamma_k(F) = [F, \gamma_{k-1}(F)],\ k = 2, 3, \dots,$$

де $[U, V] =< [u, v]|u \in U, v \in V >$ – взаємний комутант підгруп U, V;

г) Підгрупа m-тих степенів $F^m =< u^m|u \in F >$.

Ми використали поняття вербальної підгрупи для певної характеризації лівих ідеалів кільця ендоморфізмів $End\,F$ вільної групи F в роботі [3].

Висновки

Вільна група є цікавим і корисним об'єктом вивчення в теорії груп на прикладі якої будуються різноманітні алгебраїчні конструкції. Результати дослідження вільної групи застосовуються і в теорії напівгруп, зокрема для опису ідеалів напівгрупи ендоморфізмів вільної групи.

Література

1. *В.Магнус, А.Каррас, Д.Солитер.* Комбинаторная теория групп. Москва: Наука, 1974.
2. *Х. Нейман* Многообразия групп.М.:Мир, 1972, 192 с.
3. *В.Є. Величко* Ліві та праві ідеали напівгрупи ендоморфізмів вільної групи. Збірник наукових праць фізико-математичного факультету ДДПУ, Випуск №9, Слов'янськ : ДДПУ, 2019, С. 19–24.

V.Ye. Velychko

Donbas State Pedagogical University, Sloviansk, Ukraine.

Free group endomorphisms

In this work, the automorphism or endomorphism of a free group is determined by means of the elementary Nielsen transformation of rank n by multiplied sets of words of a free group. The structure of the verbal subgroup of a free group is considered.

Keywords: *free group, endomorphism, automorphism, Nielson transformation.*