УДК 517.928

Рашевський М.О.

[1] *кандидат фізико-математичних наук, доцент, Криворізький національний університет*

e-mail: mora290466@gmail.com, ORCID 0000-0003-1136-2691

ПРО АСИМПТОТИЧНЕ ІНТЕГРУВАННЯ СЛАБКО НЕЛІНІЙНИХ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНИХ СИСТЕМ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Досліджується вплив нелінійності системи на характеристичний полігон лінійної частини. Побудовано асимптотику розв'язку задачі Коші при певних обмеженнях на коефіцієнти системи.

Ключові слова: *точка повороту, сингулярне збурення, діаграмний аналіз, слабка нелінійність, асимптотичне зображення.*

Вступ

Системи вигляду

$$\varepsilon^h \frac{dx}{dt} = A(t,\varepsilon)x + \varepsilon^p f(t,x) \tag{1}$$

вивчалися у роботах [1, 2], де побудовано асимптотичне зображення розв'язку задачі Коші:

$$x(0,\varepsilon) = x^0 \tag{2}$$

на проміжку $t \in [0, L]$, $L < \infty$. Тут $x(t,\varepsilon)$ – шуканий n-вимірний вектор, $A(t,\varepsilon)$ — $n \times n$-матриця, що зображується збіжним рядом за степенями дійсного малого параметра $\varepsilon > 0$: $A(t,\varepsilon) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k A_k(t)$, h, p — додатні раціональні числа; $f(t,x)$ — поліном степеня $N \geqslant 2$: $f(t,x) = \sum\limits_{|K|=2}^{N} f_K(t) x^K$, $f_K(t) = \mathrm{colon}\{f_{1,K}(t), f_{2,K}(t), \ldots, f_{n,K}(t)\}$; $K = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$, $|K| = k_1 + k_2 + \ldots + k_n$, $x^K = x_1^{k_1} \cdot x_1^{k_2} \cdot \ldots \cdot x_1^{k_n}$.

На вигляд асимптотики розв'язку задачі (1), (2) істотно впливає характер спектру матриці $A(t,0)$, тобто кратність коренів полінома $P(\lambda,t,0)$; $P(\lambda,t,\varepsilon) \equiv \det(A(t,\varepsilon) - \lambda E)$, E – одинична матриця. Ізольовані точки досліджуваного проміжку, де збігаються принаймні два корені характеристичного полінома, називаються точками повороту (ТП). Ряд прикладних задач призводить до необхідності досліджувати системи рівнянь із ТП [1, 2].

Теоретичні основи дослідження

Відомо [1, 3, 4] що окіл кожної з ТП поділяється на класичну та резонансну зони (в термінах [4] — область впливу — *influence domain*). Резонансна зона складається із декількох частин, на кожній з яких асимптотика розв'язку принципово відрізняється від асимптотик в інших зонах. Для лінійних систем кількість частин резонансної зони дорівнює кількості ланок так званого характеристичного полігону [4]. Побудована на кожній із частин (околу ТП $t = 0$ в комплексній площині) вигляду

$$|t| \leqslant M_m \, |\varepsilon|^{\rho_m}, \; M_k \, |\varepsilon|^{\rho_k} \leqslant |t| \leqslant \delta_{k-1} \, |\varepsilon|^{\rho_{k-1}}, \; M_k >> 1, \; \delta_k << 1, \quad k = \overline{1, m}$$

асимптотика розв'язку системи, отриманої з (1) «склеюється» із сусідньою в областях $\delta_k \, |\varepsilon|^{\rho_k} \leqslant |t| \leqslant M_k \, |\varepsilon|^{\rho_k} \quad k = \overline{1, m}$. Саме у такому способі розв'язування задачі (1), (2) полягає так званий багатомасштабний метод [2] – [5]. Система (1) названим методом досліджувались в [1, 3]. Для лінійної системи кількість показників полігону є скінченною. Для нелінійних систем в [1, стор. 42] сформульовано проблему про скінченність процедури багатомасштабних перетворень (в термінах [1] – «перестроек»). Для розв'язання сформульованої проблеми необхідно дослідити окіл ТП на предмет скінченності множини частин резонансної зони, тобто дослідити полігон системи (1) на предмет скінченності кількості показників. При загальному вигляді нелінійності для розв'язання проблеми необхідно побудувати аналог лінійного характеристичного полігону. На сьогодні цього поняття не розроблено і є предметом подальших досліджень.

У цій роботі з'ясуємо, при якому вигляді нелінійності характеристичний полігон лінійної частини не зміниться, а також побудуємо при певних обмеженнях асимптотику задачі (1), (2) методом М.І. Шкіля [7].

Результати та їх обговорення

Вимагатимемо виконання наступних умов.

1^0. Матриці $A_k(t)$ і коефіцієнти полінома $f(t,x)$ є нескінченно диференційовними на проміжку $[0, L]$.

2^0. Корені полінома $P(\lambda, t, 0)$ різні на $(0, L]$ і збігаються при $t = 0$.

3^0. Матриця $A(0,0)$ подібна жордановій клітці H_n.

Якщо існують цілочисельні вектори $m = (m_1, m_2, \ldots, m_n)$ із $|m| \geqslant 2$ такі, що функції $\Phi(t, s, m) \equiv \langle m, \lambda(t) \rangle - \lambda_s(t)$ перетворюються в нуль при деяких t і $s \in \{1, \; 2, \ldots, \; n\}$, то спектр матриці $A(t, 0)$ називатимемо резонансним [2]. Тут $\langle m, \lambda(t) \rangle \equiv \sum\limits_{k=1}^{n} m_k \lambda_k(t)$ — скалярний добуток. Внаслідок виконання умови 2^0 спектр матриці $A(t, 0)$ є принаймні точково-резонансним: у ТП $t = 0$ рівність $\Phi(0, s, m) = 0$ виконується для будь-яких s і m.

Використовуватимемо позначення δ_{ij} – символ Кронекера та $\delta_k f$ — k-а координата вектора f. Згідно з позначеннями, $\delta_m f_K(t) = f_{m,K}(t)$.

Дослідження характеристичного полігону лінійної частини системи.

Підстановкою $x(t,\varepsilon)=P(t,\varepsilon)y(t,\varepsilon)$ система (1) зводиться до вигляду

$$\varepsilon^h \frac{dy}{dt} = B(t,\varepsilon)y + \varepsilon^p g(t,y,\varepsilon),$$

де матриця $B(t,\varepsilon)$ матиме нормальну форму Арнольда, а поліном $g(t,\boldsymbol{y},\varepsilon)$ міститиме мономи такого ж степеня, як і поліном $f(t,x)$. Тому вважатимемо, що матриця системи (1) записана в арнольдовій формі. Внаслідок умов 2^0, 3^0 $A(t,\varepsilon)=H_n+\|\delta_{ni}a_{ik}(t,\varepsilon)\|$.

Асимптотика розв'язку системи (1) на кожному із проміжків резонансної зони будується із використанням зрізаючого перетворення [2, 4], тобто перетворення вигляду $x(t,\varepsilon) = \Lambda(\alpha,\beta)y(t,\varepsilon)$, де $\Lambda(\alpha,\beta) = \operatorname{diag}\left\{1,(\varepsilon^\alpha t^\beta),(\varepsilon^\alpha t^\beta)^2,\ldots,(\varepsilon^\alpha t^\beta)^{n-1}\right\}$. Задача зрізаючого перетворення – виділити ті доданки системи, які є головними у тій чи іншій частині резонансної зони. Оскільки при наявності описаної вище ТП кожен моном нелінійної частини системи є резонансним, то нелінійні доданки мають ввійти до головної частини перетвореної системи для відсутності в асимптотиці так званих секулярних членів [2]. Тому зрізаюче перетворення необхідно змінити так, щоб воно підсилювало нелінійність системи, і для лінійної частини зберігало властивості перетворення $\Lambda(\alpha,\beta)$.

Для систем більш загального вигляду

$$\varepsilon^h B(t,\varepsilon)\frac{dx}{dt} = A(t,\varepsilon)x + \varepsilon^p f(t,x)$$

необхідно використовувати канонічну форму в'язки матриць $A(t,\varepsilon)+\lambda B(t,\varepsilon)$ [5, 6], і процес «зрізання» потребує розробки навіть для лінійного випадку.

Розглянемо перетворення вигляду

$$x(t,\varepsilon) = \Lambda_{a,b}(\alpha,\beta)y(t,\varepsilon), \tag{3}$$

де $\Lambda_{a,b}(\alpha,\beta) = \operatorname{diag}\left\{(\varepsilon^\alpha t^\beta)^{h_1},(\varepsilon^\alpha t^\beta)^{h_2},\ldots,(\varepsilon^\alpha t^\beta)^{h_n}\right\}$, а величини a і b описано далі.

Оскільки в результаті перетворення (3) елементи матриці нової системи запишуться як $\left\|(\varepsilon^\alpha t^\beta)^{h_j-h_i}a_{ij}(t,\varepsilon)\right\|$, то для збереження жорданової структури перетвореної матриці показники $h_1,h_2,\ldots,h_n$ мають задовольняти співвідношенню $h_k-h_{k-1}=h_{k-1}-h_{k-2}$, або $h_k-2h_{k-1}-h_{k-2}=0$, $k=3,4,\ldots,n$. Загальним розв'язком останнього різницевого рівняння є послідовність $h_k=a+b(k-1)$, де a і b довільні сталі.

Дослідимо вплив перетворення $\Lambda_{a,b}(\alpha,\beta)$ на лінійну частину системи (1). Для цього опишемо коротко побудову характеристичного полігону у припущенні, що $A(t,\varepsilon)$ є аналітичною по t і зведена до арнольдової форми.

Позначимо елементи матриці системи відповідно до [4]:

$$a_{n\,n-k+1}(t,\varepsilon)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\varepsilon^{\nu}p_{k\nu}(t),\quad p_{k\nu}(t)=\sum_{d=m_{k\nu}}^{\infty}t^{d}p_{k\nu l}.$$

Побудувавши в системі координат OXY точки $P_{k\nu}=\left(\frac{\nu}{k};\frac{m_{k\nu}}{k}\right)=Q_i(\alpha_i;\beta_i)$, $R(h;-1)=Q_m(\alpha_m;\beta_m)$, обчислимо показники $\rho_i=-\frac{\alpha_i-\alpha_{i-1}}{\beta_i-\beta_{i-1}}$.

Показники обчислюються лише для Q_i, що належать підмножині опуклої оболонки нанесених точок — ламаній, яка з'єднує точку з абсцисою $X=0$ із точкою з абсцисою $X=h$. Згідно з [4] $0=\rho_0<\rho_1<\ldots<\rho_m$. Якщо $m=1$, то полігон містить лише одну ланку [3, 5], і резонансна зона є проміжком вигляду $[0,M\varepsilon^{\rho}]$. Саме такий випадок розглядається у роботах [1, 3, 5]. Після перетворення (3) системи (1) дістанемо:

$$\varepsilon^{h}\frac{dy}{dt}=(\Lambda^{-1}A(t,\varepsilon)\Lambda-\varepsilon^{h}\Lambda^{-1}\Lambda')y+\varepsilon^{p}\Lambda^{-1}f(t,\Lambda y,\varepsilon),\quad \text{або}$$

$$\varepsilon^{h}(\varepsilon^{\alpha}t^{\beta})^{-b}\frac{dy}{dt}=(\varepsilon^{\alpha}t^{\beta})^{-b}(\Lambda^{-1}A(t,\varepsilon)\Lambda-\varepsilon^{h}\Lambda^{-1}\Lambda')y+\varepsilon^{p}(\varepsilon^{\alpha}t^{\beta})^{-b}\Lambda^{-1}f(t,\Lambda y,\varepsilon),$$

$$\text{де } \Lambda^{-1}A(t,\varepsilon)\Lambda-\varepsilon^{h}\Lambda^{-1}\Lambda'=H_n+\left\|\delta_{ni}(\varepsilon^{\alpha}t^{\beta})^{-b(n-k+1)}a_{nk}\right\|-\beta\varepsilon^{h}(\varepsilon^{\alpha}t^{\beta})^{-b}t^{-1}bH,$$

$$H=\operatorname{diag}\{h_1,h_2,\ldots,h_n\};(\varepsilon^{\alpha}t^{\rho})^{-kb}a_{n\,n-k+1}=\sum_{\nu,d}\varepsilon^{\nu-kab}t^{d-k\beta b}p_{\nu kd}.$$

При цьому необхідно, щоб $\varepsilon^{\nu-kab}t^{d-k\beta b}\to 0$ при $\varepsilon\to 0$, тому координати вершин полігону повинні мати вигляд $P_{k\nu}=\left(\frac{\nu}{bk};\frac{m_{k\nu}}{bk}\right)$. Отже, щоб вигляд і показники полігону залишились незмінними, ще одне обмеження виглядатиме як $b=1$.

Розглянемо нелінійну частину перетвореної системи, яка запишеться як $\varepsilon^{p}(\varepsilon^{\alpha}t^{\beta})^{-b}\Lambda^{-1}f(t,\Lambda y,\varepsilon)$. З урахуванням вигляду нелінійності, матимемо:

$$\delta_i\Lambda^{-1}f(t,\Lambda y,\varepsilon)=O\left((\varepsilon^{\alpha}t^{\beta})^{\langle H,K\rangle-b_i}\right).$$

Вимагаючи, щоб нелінійність на розглядуваному проміжку мала порядок по ε вищий від порядку лінійної частини, дістанемо необхідні для цієї вимоги нерівності:

$$p+(\alpha+\beta\rho)\langle H,K\rangle-h_i-b+\rho m_{i\,k}\geqslant 0,\quad i=\overline{1,n},\tag{4}$$

причому число ρ визначиться із співвідношення $\rho+(1-n)b=b=h-\rho$. Виконання записаних співвідношень гарантує, що полігон лінійної частини системи, його показники залишаться незмінними.

Наведені міркування сформулюємо у вигляді наступного твердження.

Теорема 1. *Якщо виконуються умови* 1^0 –3^0 , *і* ρ_k *— показник характеристичного полігону лінійної частини системи* (1) , *то при виконанні нерівностей* (4) *система рівнянь, отримана в результаті зрізаючого перетворення системи* (1) , *є системою рівнянь зі слабкою нелінійністю та стабільним спектром лінійної частини на проміжку* $M_k\,|\varepsilon|^{\rho_k} \leqslant |t| \leqslant \delta_{k-1}\,|\varepsilon|^{\rho_{-1k}}$, $M_k >> 1$, $\delta_{k-1} << 1$.

Питання «зрощування» розв'язків є проблемою окремого дослідження, і може бути виконане методом [5].

Приклад 1. У роботі [1] побудовано асимптотику розв'язку рівняння

$$\varepsilon^2 u'' + xu = \varepsilon u^n;\ n \text{ – додатне ціле число.}$$

Заміною $\varepsilon u' = v$ отримаємо систему

$$\varepsilon \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} 0 \\ u^n \end{pmatrix}.$$

Показник характеристичного полігону лінійної частини системи $\rho = \frac{2}{3}$. Перетворення $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon^{-\gamma} & 0 \\ 0 & \varepsilon^{\gamma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$, $\gamma = \frac{1}{6}$ та заміна змінної $x = \varepsilon^{\rho} t$ зводить розглядувану систему до вигляду

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} + \varepsilon^{\frac{3-n}{\sigma}} \begin{pmatrix} 0 \\ z^n \end{pmatrix}.$$

Очевидно, що порядок нелінійності по ε перевищує порядок лінійної частини, якщо $n \leqslant 3$. У випадку $n > 3$ описана заміна, а отже і полігон лінійної частини системи та його показник не дають можливості побудувати розв'язок рівняння.

Приклад 2. У роботі [3] побудовано асимптотику розв'язку рівняння

$$\varepsilon^2 u_{tt} + f(t,u) = 0, \quad u(0) = u_0, \quad \varepsilon u'(0) = u_1;$$

$$f(t,u) = a_1(t)u + a_2(t)u^3 + ... + a_l(t)u^{2l-1}; \quad a_j(t) = t^{2n_j}\alpha_j(t),\ \alpha_j(t) > 0.$$

Дане рівняння можна вважати слабконелінійним, оскільки в ТП $t = 0$ нелінійність зникає, а досліджується рівняння саме в околі ТП. Запишемо рівняння у вигляді системи

$$\varepsilon \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ t^{2n_1}\alpha_1(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ t^{2n_2}\alpha_2(t)u^3 + ... + t^{2n_l}\alpha_l(t)u^{2l-1} \end{pmatrix}$$

Показник характеристичного полігону лінійної частини системи $\rho = \frac{1}{n_1+1}$. Перетворенням такого ж вигляду, як і в прикладі 1 із $\gamma = \frac{n_1\rho}{2}$ отримаємо систему із нелінійністю, яка є слабкою або такого ж порядку по ε, як і лінійна частина системи при виконанні нерівностей $(2n_k+1)\rho - 2k\gamma - 1 \geqslant 0$, $k = \overline{1,l}$, звідки після перетворень дістанемо: $\dfrac{n_k}{k+1} \geqslant \dfrac{n_1}{2}$, що узгоджується із результатами [3], де при побудові внутрішнього розв'язку рівняння використано показник $\mu = \min\limits_{1\leqslant j\leqslant l} \frac{n_j}{j+1}$. Якщо цей мінімум досягається при $j=1$, то показник характеристичного полігону лінійної частини системи, як і сам полігон, залишаються незмінними.

Асимтотика задачі (1), (2).

У роботі [7] запропоновано метод побудови формального розв'язку лінійної системи шляхом використання узагальненого або «збуреного» характеристичного рівняння $P(\lambda,t,\varepsilon) = 0$, що дозволило при певних обмеженнях на коефіцієнти та ранг побудувати асимптотику задачі Коші лінійної системи [8]. Використаємо методи [7, 8] для побудови асимтотики розв'язку задачі (1), (2) та з'ясуємо характер нелінійності, який дозволить отримати асимптотику розв'язку у вигляді багатофазового ряду [2]. Для спрощення запису деяких формул припускатимемо надалі, що корені згаданого характеристичного рівняння є суто уявними. Вимагатимемо виконання наступних умов.

4^0. Дискримінант $D(t,\varepsilon)$ полінома $P(\lambda,t,\varepsilon)$ задовольняє нерівність $|D(t,\varepsilon)| \geqslant |D(0,\varepsilon)| \neq 0$, $t \in (0,L]$.

Перегрупуємо доданки в зображенні матриці $A(t,\varepsilon)$ наступним чином:

$$A(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{kh} A_k(t,\varepsilon),$$

$$A_k(t,\varepsilon) = \sum_{s=m(r)}^{m(r+1)-1} \varepsilon^{s-rh} A_s(t), \quad m(r) = [rh] + \left[1 - \frac{[rh]}{rh}\right],$$

$r = 0,1,2,..., m(0) = 0$, $[d]$ – ціла частина числа d. Внаслідок умов 2^0, 3^0 для елементу $a_{n\,1}(t,\varepsilon)$ матриці $A_0(t,\varepsilon)$ справджується рівність $a_{n\,1}(0,0) = 0$. Для одержання оцінок, аналогічних [8], вимагатимемо виконання наступної умови на вказаний елемент.

5^0. $a_{n\,1}(0,\varepsilon) = O(\varepsilon)$, $a_{n\,1}(t,\varepsilon) \neq 0$ для $t \in [0,L]$.

Внаслідок умови 4^0 корені характеристичного рівняння є різними на досліджуваному проміжку, тому існує невироджена матриця $T(t,\varepsilon)$ така що

$$T^{-1}A_0(t,\varepsilon)T = \Lambda(t,\varepsilon) = \mathrm{diag}\{\lambda_1(t,\varepsilon), \lambda_2(t,\varepsilon), \ldots, \lambda_n(t,\varepsilon)\}.$$

Підстановкою $x(t,\ \varepsilon) = T(t,\ \varepsilon)y(t,\ \varepsilon)$ система (1) зводиться до вигляду

$$\varepsilon^h \frac{dy}{dt} = (\Lambda(t,\varepsilon) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^{kh} B_k(t,\varepsilon))y + \varepsilon^p g(t,y,\varepsilon), \tag{5}$$

де згідно з лемою роботи [8]

$$T^{-1}(t,0)T'(t,0) = O\left(t^{-1}\right),\ T^{-1}(0,\varepsilon)T'(0,\varepsilon) = O\left(\varepsilon^{-1}\right),$$

тому $B_1(t,0) = O\left(t^{-1}\right)$, $B_1(0,\varepsilon) = O\left(\varepsilon^{-1}\right)$. Інші матриці у ТП матимуть полюс по ε більш низького порядку, ніж матриця B_1.

У припущенні, що $f_{i,K}(t) = O\left(t^{m(i,K)}\right)$, при $t \to 0$ $m(i,K) \geqslant 0$, матимемо наступні оцінки:

$\delta_i f(t,Tz) = f_{i,K}(t) p_{i,K}(t,\varepsilon) z^K$; $p_{i,K}(0,\varepsilon) = O(\varepsilon^{\gamma(i)})$, $\gamma(i) = \frac{1}{n}\sum\limits_{l=1}^{n}(i-l)k_l$;

$p_{i,K}(t,\varepsilon)$ – функції, що виражаються через елементи матриці $T(t,\varepsilon)$.

Оскільки $g(t,y,\varepsilon) = T^{-1}(t,\varepsilon)f(t,T(t,\varepsilon)x)$, то $\varepsilon^{\frac{1}{n}} g(t,y,\varepsilon) = O(1)$ в околі ТП. Нехай $\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\left\{\gamma(i) - \frac{i-1}{n}\right\} = q$. Наступною підстановкою $y(t,\varepsilon) = \exp\{\varepsilon^{-h}\int_0^t \Lambda(s,\varepsilon)ds\} z(t,\varepsilon)$ зведемо систему (5) до вигляду

$$\varepsilon^h \frac{dz}{dt} = \varepsilon^h A_1(t,\varepsilon)z + \varepsilon^p f(t,z,\varepsilon),$$

де $A_1(t,0) = O(t^{-1})$. До останньої системи застосуємо метод послідовних наближень [8] за схемою $z_n(t,\varepsilon) = z_0 + \int\limits_0^t (A_1(s,\varepsilon)z_{n-1} + \varepsilon^{p-h} f_1(s,z_{n-1},\varepsilon))ds$, $n \geqslant 1$, взявши $z_0 = z(0) = T^{-1}(0,\varepsilon)x(0)$.

Інтеграл у правій частині останньої рівності містить лінійну та нелінійну відносно $z(t,\varepsilon)$ частини. Перша з них згідно з вище наведеними міркуваннями має вигляд $a_{ij}(s,\varepsilon)\exp\{\varepsilon^{-h}\int\limits_0^s (\lambda_i(t,\varepsilon) - \lambda_j(t,\varepsilon))dt\}$, а друга запишеться як $\int\limits_0^t t^{m(K)} g_i(t,\varepsilon)\exp\{\varepsilon^{-h}\int\limits_0^t \Phi(\tau,i,K)d\tau\}dt$.

З урахуванням оцінок для елементів матриці $A_1(t,\varepsilon)$ та T, дістанемо:

$$\left\|\int\limits_0^t A_1(s,\varepsilon)z_0 ds\right\| \leqslant C\varepsilon^{-1+\frac{nh}{n+1}};$$

інтеграл $\int\limits_0^t t^m g_i(t,\varepsilon)\exp\{\varepsilon^{-h}\int\limits_0^t \tau^k d\tau\}dt = O\left(\varepsilon^{\frac{h}{k+1}(m+1)}\right)$, що згідно із **(6, 8)** має місце при скінченних t. Тому

$$\left\| \int\limits_0^t (\varepsilon^{p-h} f_1(s, z_0, \varepsilon)) ds \right\| \leqslant \varepsilon^{p-h+q+\frac{nh}{n+1}(m+1)},$$

де C — стала, що не залежить від ε (для кожного інтегралу – своя).

Надалі всі сталі в оцінках інтегралів методом [2] позначатимемо через C. Таким чином, позначивши $\sigma = \min\left\{p - h + q + \frac{nh}{n+1}(m+1); \frac{nh}{n+1} - 1\right\}$, дістанемо оцінку

$$\|z_1(t, \varepsilon) - z_0(t, \varepsilon)\| \leqslant \varepsilon^{\sigma}.$$

Таким чином, перше наближення для досить малих ε є обмеженим при виконанні нерівностей

$$p - h + q + \frac{nh}{n+1}(m+1) > 0, \quad h > 1 + \frac{1}{n}. \tag{6}$$

Останню з нерівностей, яку дістаємо із лінійної частини системи, отримано з інших міркувань у роботі [8]. Продовжуючи далі процес послідовних наближень, матимемо:

$$\|z_k(t, \varepsilon) - z_{k-1}(t, \varepsilon)\| \leqslant \varepsilon^{k\sigma}, \quad k \geqslant 1.$$

Зауважимо, що при відсутності нелінійної частини (поклавши формально $p = \infty$) системи (1) дістанемо оцінку $\|z_k(t, \varepsilon) - z_{k-1}(t, \varepsilon)\| \leqslant \varepsilon^{-k+\frac{nkh}{n+1}}$.

Наведені міркування сформулюємо у вигляді наступного твердження.

Теорема 2. *Якщо виконуються умови* 1^0 –5^0 *і задача* (1), (2) *має розв'язок* $x(t, \varepsilon)$ *на проміжку* $t \in [0, L]$, *то у випадку суто уявних коренів полінома* $P(\lambda, t, \varepsilon)$ *і виконання нерівностей* (5) *даний розв'язок має асимптотику вигляду*

$$x_m(t, \varepsilon) = T(t, \varepsilon) \exp\{\varepsilon^{-h} \int_0^t \Lambda(s, \varepsilon) ds\} z_m(t, \varepsilon)$$

таку, що справджується оцінка $\|x(t, \varepsilon) - x_m(t, \varepsilon)\| \leqslant \varepsilon^{m\sigma}$.

Висновки та перспективи подальших досліджень.

Проблема асимптотичного інтегрування слабко нелінійних систем із ТП на теперішній час не розв'язана. Для деяких систем, як з'ясовано вище можуть бути застосовані «лінійні» методи, зокрема багатомасштабний метод, і побудувати асимптотичне зображення розв'язку, як сформульовано у теоремі 2. Загальний вигляд нелінійності у системі необхідно досліджувати іншими методами. Побудова нелінійного аналогу характеристичного полігону потребує розробки і складатиме тему подальших досліджень.

Література

1. *Богаевский В.Н., Повзнер А.Я.* Алгебраические методы в нелинейной теории возмущений. — Москва : Наука, 1987. — 356 с.
2. *Grimm L.J., Harris W.A.* Solutions of a singularly perturbed differential system with turning points. // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. Sec I. A. — 1989. — 36, №3 — P. 753–763.
3. *Мотылев Л.Ю.* Асимтотика вблизи от точки поворота для нелинейного уравнения второго порядка. // Математические заметки. — 1990. — 48, вып. 6 — С. 145–146.
4. *Iwano M., Sibuya Y.* Reduction of the order of a linear ordinary differential equation containing a small parameter. // Kōdai Math. Semin. Repts. — 1962. — 36, №3 — P. 1–28.
5. *Самойленко А.М., Самусенко П.Ф.* Асимптотичне інтегрування сингулярно збурених диференціально-алгебраїчних систем з точками повороту. // Український математичний журнал. — 2020. — 72, № 12 — С. 1669–1681.
6. *Samusenko P.F.* About canonical forms of regular matrix pencil. // Miskolc Mathematical Notes. — 2016. — Vol. 17, No. 2 , — P. 1033–1047.
7. *Шкиль Н.И.* О периодических решениях систем дифференциальных уравнений второго порядка // Arch. Math. (Brno). — 1987. — 23, №1 — P. 53–62.
8. *Шкіль М.І., Рашевський М.О.* Асимптотичне зображення розв'язку систем лінійних диференціальних рівнянь з простою точкою повороту // Доповіді АН України. — 1992. — № 4 — С. 13–17.

M.O. Rashevs'kyi
Kryvyi Rih National University, Kryvyi Rih, Ukraine.

On Asymptotic Solutions of Weakly Nonlinear Singular Perturbed Systems of Ordinary Differential Equations

Influences of nonlinear part of singular perturbed systems on the linear characteristic polygon are investigated. We construct asymptotic solution for the Cauchy problem for weakly nonlinear differential equations in the case where is available turning point.

Keywords: *turning point, singular perturbation, diagram analysis, weak nonlinearity, asymptotic representation.*