

# МЕТОДИКА НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ В ЗАКЛАДАХ ЗАГАЛЬНОЇ СЕРЕДНЬОЇ ТА ВИЩОЇ ОСВІТИ

УДК 37.016:[517+519]

Філер З.Ю.

<sup>1</sup> доктор технічних наук, кандидат фізико-математичних наук, професор

e-mail: zalmenfilier3319@gmail.com, ORCID 0000-0003-0804-6794

## ЩО НОВОГО НАМ ВДАЛОСЯ ЗРОБИТИ ЗА РОКИ ВИКЛАДАННЯ

Розглядається 66-річний досвід викладання автора. Його основні досягнення полягають у індивідуальності домашніх робіт учнів (студентів), розв'язанні з ними реальних завдань, творчий пошук і публікація результатів. В ході викладання визрівали нові підходи в математиці та її застосуваннях.

**Ключові слова:** *індивідуальність робіт, реальні завдання, пошук і публікації.*

### Індивідуалізація домашніх завдань.

Автор почав вчителювати в 1953 р. після 2 років заочного навчання в університеті. Досить швидко побачив, що більшість учнів або не робить домашніх вправ, або списує їх при наявності контролю. Вирішив давати значно менше задач, але всім різні. Особливо це стосувалося задач з геометрії. Домовилися, що кожен виконує «свої» задачі з поясненнями, з побудовою. Це важливо для задач з стереометрії. Сприяло й то, що він викладав і креслення, і мав 6 років праці слюсарем на заводі та в шахті.

### Розв'язання разом зі студентами реальних проблем.

З 1960 р. почалася робота автора в Донецькій політехніці (ДПІ). Працюючи асистентом на кафедрі математики, він шукав тему наукової роботи. На кафедрі ніхто наукової роботи не вів. За пропозицією декана познайомився з доцентом В.К. Пресняковим, який починав працювати над докторською дисертацією з вібротехніки. За місяць розібрався з асимптотичними методами М.М. Боголюбова – Ю.А. Митропольського і став з грудня 1960 р. помічником Преснякова в розробці методів розв'язання задач коливання машин з неідеальним двигуном. Це була діяльність типового математика-прикладника. У викладанні застосовував свій виробничий досвід, вчився сам,

навчаючи студентів. Застосовував свій метод індивідуальних завдань. Краще менше, але глибше, наочніше. Практичні заняття ставали схожими на наукові семінари. Це подобалося студентам. Вів лекції у Макіївській філії ДПІ, згодом читав лекції збагачувальникам. Вібромашини застосовували на збагачувальних фабриках. Математичні методи досліджування функцій, які викладав студентам, застосовував у своїй науковій роботі. В 1963 р. ДПІ отримав ЕЦВМ (до того на кафедрі автоматики працювала АВМ МН-7, яка дозволяла розв'язувати нескладні нелінійні задачі). В 1965 р. на науковій конференції з вібротехніки в Ленінграді автор отримав запрошення відвідати «Механобр». Так сталося знайомство з І.І. Блехманом і його вібростендом з самосинхронними збудниками. Воно стало початком багаторічної дружби. Блехман став опонентом на захисті кандидатської в Інституті математики АН УРСР в 1966 р., а згодом і докторської в КПІ (1987 р.). Взаємодія зі студентами підсилилася після переходу на кафедру прикладної математики в 1976 р., зі студентами якої він працював з моменту відкриття підготовки інженерів-математиків. Курсові і дипломні роботи ставали частинами наукових проблем, які розв'язував автор. В 1978–1979 навчальному році автор керував 10 дипломниками. Їх роботи відправлялися на республіканські та всесоюзні конкурси. Робота В. Рогова була нагороджена золотою медаллю. Результати направлялися в журнали та на конференції. Випускники 1976 р. Л. Хухлович та О. Рузін ставали співавторами публікацій. Б. Березецький, розв'язуючи задачу про фільтрацію через сито віброцентрифуги, отримав цікавий результат на математичній моделі, який став елементом заявки Інституту «Діпромашвуглезбагачення» (Луганськ) на винахід. Роботи автора з ДонВГІ виконувалися з участю студентів. Поступово збільшувалася доля програмістської підготовки за рахунок зменшення математичної, що привело автора до пошуків роботи на фізмат факультетах. Запросили в Кіровоградській педінститут (КДПІ). У жовтні 1989 р. почав працювати професором, а в листопаді став завкафедрою математики. Припинилася 30-річна робота по госптемах, яку вів у Донецьку. Спроби знайти таку роботу в Кіровограді були марними — розпадалася система державного фінансування. Влітку 1990 р. отримав пропозицію від акад. В.М. Потураєва з Дніпра на роботу з вібраційною дією на вугільний пласт, з'їздив в Дніпро, домовився про роботу. Через деякий час Потураєв сповістив, що роботи не буде — Мінвугілля не знайшло грошей. Спроби зацікавити обласну сільгоспстанцію втіленням засобу замочування насіння відцентрованою водою не мало успіху. «5% прибавки врожайності? Та ми підніmemo ціни на 10%» — відповів директор. Вирішив зосередитися на викладанні.

## Творчий пошук і публікації.

Поки звик до активного вживання української, до змісту і форми викладання математики в педінституті, залишалося мало часу до наукових пошуків. Та звичайні побутові проблеми на новому місці поглинали час. Мені вдалося узагальнити основні теореми матаналізу (Ролля, Лагранжа, Коші, формулу Тейлора), заявлені ще у пробній лекції 20.04.1989 р., перед об'явою на конкурс у КДПІ. Наприклад, теорема Лагранжа впливає з теореми Ролля, якщо розглянути визначник  $F(x)$  з рядками  $f(x) - f(a)$ ,  $g(x) - g(a)$  та  $f(b) - f(a)$ ,  $g(b) - g(a)$ .  $F(a) = F(b) = 0 \Rightarrow$  існує т.  $c$  з інтервалу  $(a, b)$ , в якій  $F'(c) = 0$ . Застосовував виведення формули Тейлора з формули Ньютона-Лейбніца та інтегрування частинами, коли отримується залишковий член у інтегральній формі, з якої за теоремою про середнє можна побачити його у формі Лагранжа. Вона має просте фізичне тлумачення у формулі шляху, пройденому в рівноприскореному русі; при  $s'''(t) \neq 0$  виникає поняття різкості руху. Взагалі, викладання математики без фізики неможливо.

У 1991 році запланував собі кураторство у групі математиків-інформатиків. Вони складали вступні іспити в Радянському Союзі, а почали заняття у Незалежній Україні. Я поставив їм задачу нікого не втратити за роки навчання. Серед них був Саша Дрозд, який мав уже досвід користання ЕОМ. При кафедрі були комп'ютерні класи «Ямаха»; такий клас був і в Облавному інституті вдосконалення вчителів. Разом з Сашою ми стали будувати алгоритми встановлення стійкості лінійних диференціальних рівнянь; згодом я прилучив його до дослідження впливу сонячної активності на клімат та врожайність. Про свої наукові результати я розповідав студентам. Починаючи тему «Інтеграл», я розповідав про чисельні методи прямокутників, трапецій та Сімпсона. Дав їм узагальнення для інтегрування коливних функцій, яке я зробив ще в Донецьку, запропонував перевірити мої результати та скласти відповідну програму. Перед наступною лекцією до мене звернувся студент і сказав, що він перевірів мої викладки і склав програму. Він продемонстрував її роботу на програмованому калькуляторі. Похваливши студента, запропонував йому піти в комп'ютерний клас і там реалізувати її на ПЕОМ. Він сказав, що не вміє працювати там. Порадив йому навчитися. Після цього О. Дреєв пропадав щоденно там до закриття. Ясно, що такими були не всі. В 1998 р. ми їхали одночасно в Тулу і в Київ на конференції з гармонічного аналізу. Розповів студентам про свій метод заучування формалізованої інформації, який деталізує метод В.Ф. Шаталова, якому наша кафедра в ДПІ дала рекомендацію на експеримент ще у 1979 р. Вимагав від боржників зробити смужки з формулами перед перескладанням.

## Не тільки математика.

Мене завжди цікавили реальні проблеми. Так було і в ДПІ, і в Кіровограді. Часто вони не були пов'язані з госптемами. В 1963 р. Пресняков дав мені експериментальні дані про силу притягання електромагніту в залежності від зазору і сказав, що я можу допомогти інституту Донвуглемаш з задачею про динаміку електромагнітного вібратора, але без його. Я взявся за цю роботу. Вона була представлена в якості реферату при спробі вступу до аспірантури Інституту математики АН УРСР. Пізніше зробив депонований рукопис (після отримання Роговим медалі). У 1979 р. зайнявся проблемою активізації води перед посівом з допомогою відцентрової сили, залучив студентів до перевірки дійовості методу ... Тоді ж познайомився з книгою О.Л. Чижевського «Земное эхо солнечных бурь», побачив там збіги максимумів сонячної активності (СА) з роками революцій та війн, розшукав у списку літератури брошуру «Физические факторы исторического процесса», замовив її по МБА. З бібліотеки Леніна вислали плівку. Ще на ходу побачив, що в ній є то, що помітив. Син роздрукував після екзамену. З випускником В. Карабчевським дослідили на ЕОМ гіпотезу про причини змін СА в гравітаційній взаємодії Сонця з планетами. З О. Дроздом зробили тези доповіді на нараді з прогнозування врожайності, яка була скликана в інституті «Агроресурси» у лютому 1995 р. внаслідок мого листа Президенту Л.М. Кравчуку в 1993 р. Перед тим прийняв участь в Установчому з'їзді Української академії оригінальних ідей навесні 1992 р. і провів восени збори її кіровоградського відділення. Це дало вихід до керівництва області. Сприяв цій роботі М.О. Сухомлин.

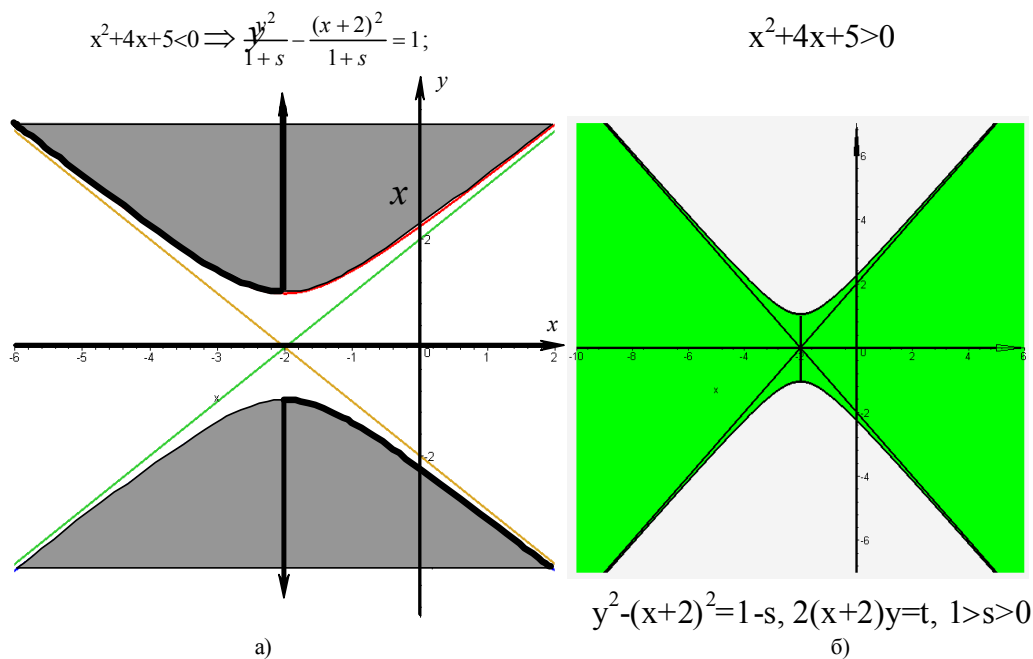
## Сонячна активність.

Роботи з вивчення сонячної активності та її наслідків [4, 5, 6] привели до вивчення математичної статистики. Книжку [6] ми переклали і видали з доповненнями українською. Тому я з радістю прийняв запрошення на створену кафедру прикладної математики, статистики та економіки, очоленої д.ф.-м.н. О.В. Авраменко. Крім звичного курсу «Рівняння матфізики» читав курс «Аналіз часових рядів», а для математиків «Числові системи». Застосовував індивідуальні домашні завдання на семестр, розробив їх структуру та направленість. Підкреслив роль методу найменших квадратів. Починав курс з створення 2 масивів — маси тіла та зросту, з обробки їх. Був розроблений алгоритм аналізу часового ряду, програму якого створив О.М. Дреєв, названий EXTRAPOL [7]. Він виділяє послідовні частоти, знаходить їх синусні та косинусні складові та «похибки» — суми квадратів відхилень, пропонує кількість частот. Студенти долали труднощі використання цієї програми про-

тягом однієї пари. Для оцінки наявності причинно-наслідкового зв'язку між масивами використовували коефіцієнт кореляції. Його тлумачили як відношення скалярного добутку двох централізованих векторів до добутку їх модулів, тобто як косинус кута між векторами. Студенти вибирали статистику якогось явища і досліджували його зв'язок з показниками СА, застосовували метод накладання епох. Результати направлялися на конференції. При вивченні курсу «Історія математики» студент отримував завдання вивчити життя і діяльність науковця. Використовуючи інтернет, він встановлював обставини життя родини, вплив близьких на вибір напрямку дослідження тощо. Особливістю робіт був аналіз впливу на творчість СА у вигляді графіків і коефіцієнту кореляції із знаходженням оптимального запізнення. Проводилися семінари їх робіт, результати оформлювалися у вигляді книг.

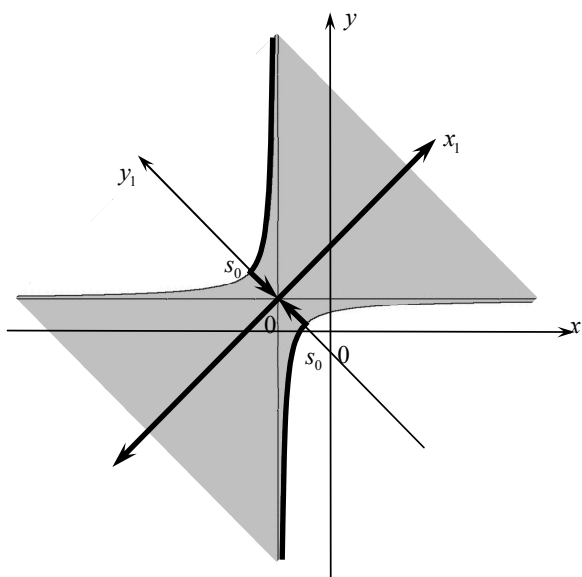
### Математичні проблеми.

У 1999 р. відмічалось 200-річчя доведення К.Ф. Гаусом основної теореми алгебри про існування кореня многочлена з комплексними коефіцієнтами. Ми провели конференцію у КДПІ, де була доповідь автора про комплексні розв'язки нерівностей. Історія цих пошуків почалася з 10-го класу вечірньої школи, де вчився автор. Від колеги по шахті він отримав підручники математики і фізики для педвузів. Серед них був і підручник вищої алгебри 1938 р. видання [1]. В ньому доводилася ця теорема з допомогою леми Д'Аламбера про існування меншого значення многочлена. В доведенні використовували розв'язок нерівності з комплексними змінними. Побачив це доведення і виникло враження, що це загально відомо. Але в шкільних підручниках були лише дійсні розв'язки. Пройшло багато років, узнав більше літератури і не зустрів такого. У 1998 р. дав студенту С. Ткаченку тему дипломної роботи по нерівностях. Запропонував йому метод нев'язки, який зводить нерівність  $f(x) < 0$  ( $f(x) > 0$ ) до рівняння з додатнім параметром  $f(x) + r = 0$ ,  $r > 0$  ( $f(x) = r > 0$ ). Через день він прибіг збентежений: «З'являються комплексні числа!». Я його заспокоїв: «Радій, ти відкрив нове». Перед захистом йому прийшлося доводити завкафедрою, що порівнюються значення дійсної частини функції, а уявна її частина  $= 0$ . Студент захистив. А я зробив тези на конференцію, в яких віддав належне і йому. Пізніше я запропонував йому зробити статтю в журнал «Математика в школі». Стаття про це вийшла вже у XXI столітті. С. Ткаченко став пошукачем. На жаль, його робота припинилася на 4 розділі дисертації. А ми продовжили нашу роботу, застосовували метод комплексної нев'язки (рис. 1). Він привів до розв'язків – півплощин, тоді як метод дійсної нев'язки давав лінії. Тут лінії стали границями півплощин. Пізніше знайшов підтвердження своїх ідей в роботі О.В. Кужеля.

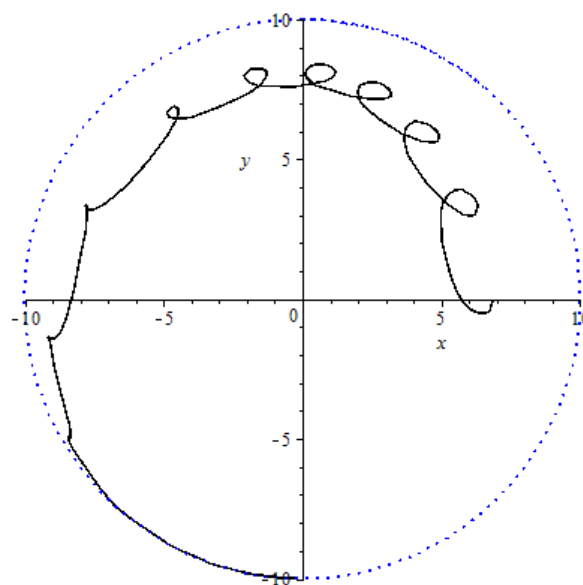


**Рис. 1:** Розв'язки нерівності з нев'язкою  $r = s + it$

Наведемо ще приклад нерівності 2-го степеня з комплексними коефіцієнтами  $(2 + 3i)x^2 + (5 + 2i)x + 4 - 3i > 0$ . Його розв'язок зображено на рис. 2.



**Рис. 2:** Жирна лінія (крім вісі  $Ox_1$ ) дійсної нев'язки та границя області



**Рис. 3:** Годограф квазімногочлена  $P(z) = 7 + 12z + 2z^2 + 3z^2e^{-5z} + 3z^3$

Друга проблема була з візуалізації *актуальної нескінченності* натурального ряду Г. Кантора. Для цього 1986 р. автор запропонував вдвічі зменшувати довжину наступної одиниці. Заявив про це в тезах на Міжнародний конгрес з логіки, методології та філософії науки. Восени 1987 р. доповів про

це. Узагальнив процес, застосувавши перетворення

$$f(x) = \frac{x}{|x|} \cdot \frac{(1 - q^{|x|})}{(1 - q)}, \quad 0 < q < 1.$$

При дійсному  $x$  це буде фінітизація числової осі, при комплексному — площини, при  $n = 3$  — простору [3]. У 2017 р. знайшов цьому застосування в теорії стійкості лінійних систем, зокрема, із запізненням [2]. Годограф характеристичного квазімногочлена асимптотичної стійкої системи повинен зробити навколо початку координат поворот на кут  $\frac{n\pi}{2}$  (рис. 2). Разом зі студентами шукав умови центру системи  $x' = f_1(x, y)$ ,  $y' = f_2(x, y)$ . У класі однорідних многочленів центр буде при гармонічних функціях; перехід до полярних координат вимагає обмеження функціями  $C_1 r^k \cos(k\varphi) + C_2 r^k \sin(k\varphi)$ . В загальному випадку буде ряд з таких функцій.

Систематизувати математичні пошуки вдалося в спецкурсах «Нове в математичній аналізі», «Стійкість лінійних систем». «Асимптотичні методи». В 1-му було показано, зокрема, поняття комплексної функції дійсного аргументу, узагальнено поняття «сталого Ейлера» як границі різниці частинної суми  $S_n$  і інтегралу від 1 до  $n + 1$  при  $n \rightarrow \infty$ ; встановлено, коли вона існує й її використання для знаходження частинних сум при великих  $n$ .

На рис. 4 показано застосування цього в теорії рядів. Стала  $C_n = S_n - I_n \rightarrow C_f$  (рис. 5)  $\Rightarrow S_n \approx I_n + C_f$ .

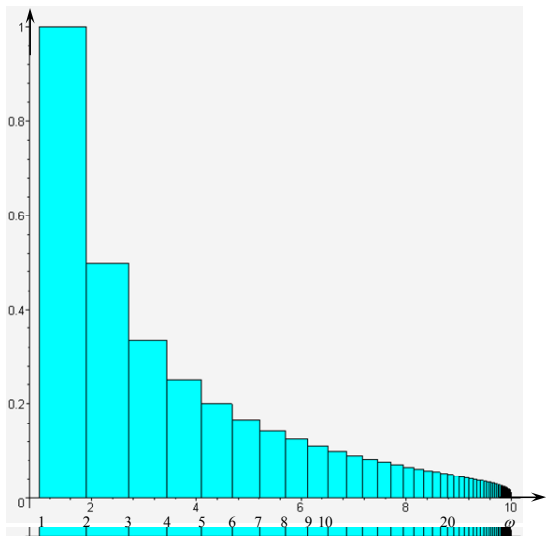


Рис. 4: Фінітизоване зображення гармонічного ряду

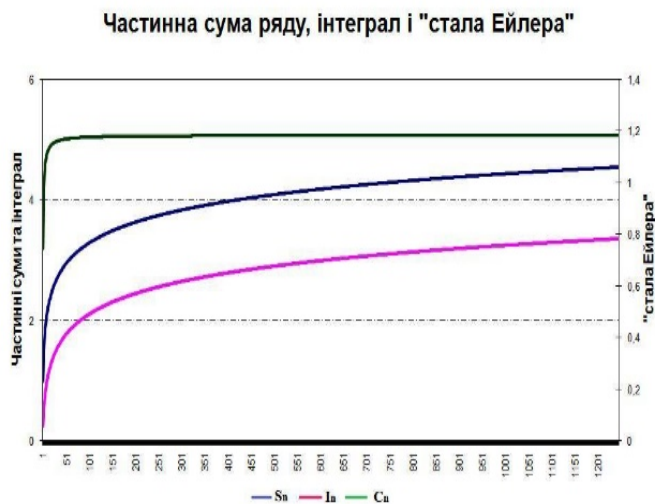
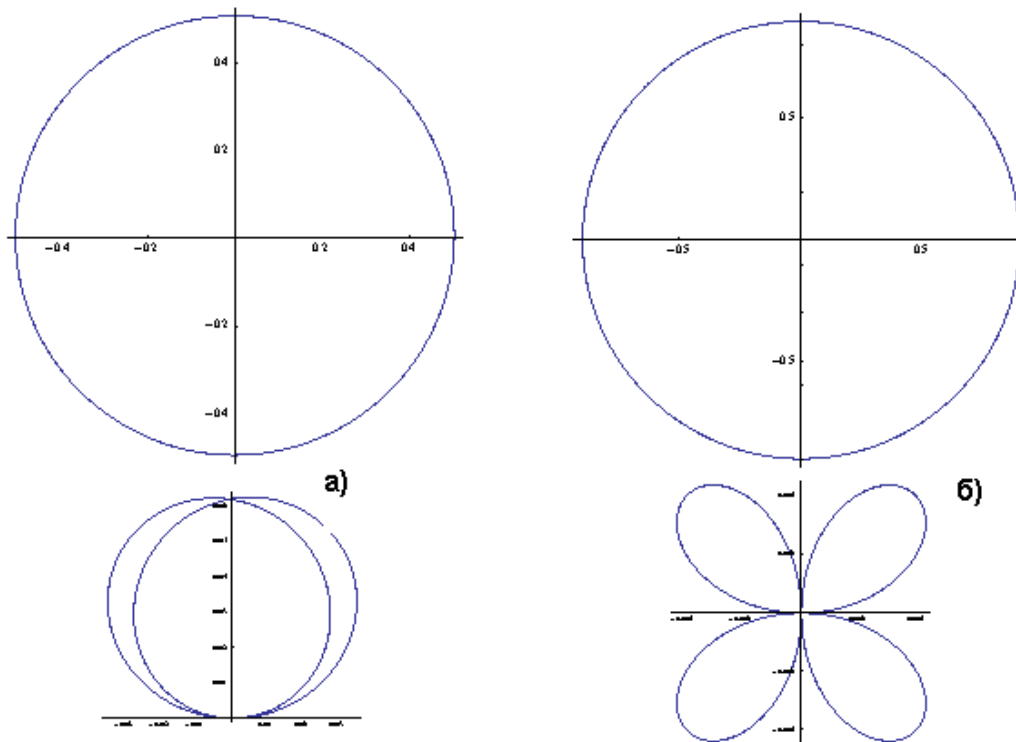


Рис. 5: Ряд  $\sum_{n=1}^{+\infty} \text{arctg}(n)$

Нами встановлена

**Теорема 1.** Система диференціальних рівнянь  $\frac{dx}{dt} = P(x, y), \frac{dy}{dt} = Q(x, y)$  з гармонічними функціями  $P(x, y), Q(x, y)$  має особливу точку типу центр.

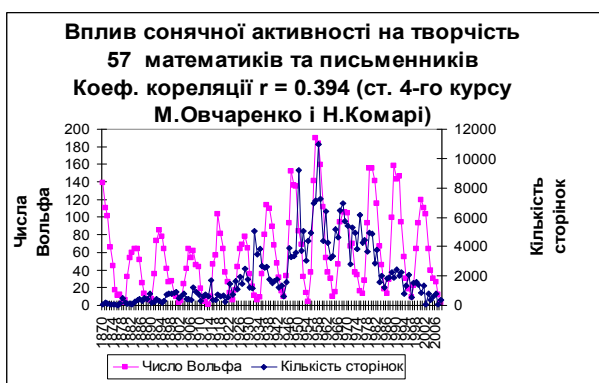
На рис. 6 зображені графіки розв'язків рівнянь



**Рис. 6:** Розв'язки рівнянь а)  $\dot{x} = e^x \cos(y) - x - 1, \dot{y} = e^x \sin(y) - y$  та б)  $\dot{x} = \sin(x) \operatorname{ch}(y) - x, \dot{y} = \cos(x) \operatorname{sh}(y) - y$

Внизу зображено криві  $r(\varphi) - r(0)$ . Доведення теореми проведено методом малого параметра А. Пуанкаре.

Покажемо ще дослідження залежності творчості від сонячної активності:



**Рис. 7:** СА і творчість



**Рис. 8:** Теж саме з накладанням епох

Ми бачимо, що метод накладання епох завдяки усередненням дає вдвічі більший коефіцієнт кореляції. Середній цикл СА складає 11 років.



Ці графіки були зроблені для доповіді автора на пленарне засідання наукової конференції Кіровоградського державного педагогічного університету в 2011 р.

Ми не проілюстрували всіх згаданих понять і методів за браком місця. Не вказали ми і всіх своїх учнів, які допомагали нам в усі довгі роки роботи. Особливо це стосується побудови графіків. Відмітимо лише О.М. Дреєва, О.І. Музиченка та А.С. Чуйкова.

## Література

1. Шапиро Г.М. Высшая алгебра. Изд. 4, доп. — М.: Учпедгиз, 1938. — 392 с.
2. Філер З.Ю., Музиченко О.І. Коливання та стійкість систем із запізненнями // Інформаційні технології в освіті, науці і техніці. Матеріали VI Всеукраїнської конференції молодих науковців ІТОНТ-2008. 5–7 травня 2008 року. — Черкаси: ЧНУ, 2008. — С. 45.
3. Філер З.Ю. Проблеми нескінченності у математиці, фізиці та філософії // Комбінаторні конфігурації та їх застосування. 5-й Міжвузівський науково-практичний семінар. — Кіровоград: КК-ТК, 2008. — С. 84–95.
4. Филер З.Е. Солнечный удар по истории ... рода человеческого // Комсомольская правда, 16.09.1989. — 4 с.
5. Чижевский А.Л. Земное эхо солнечных бурь. Изд. 2-е. — М. : Мысль, 1976. — 387 с.
6. Чижевский А.Л. Физические факторы исторического процесса. — Калуга : Гублит, 1924. — 72 с.
7. Філер З.Ю., Дреєв О.М. Стан сонячної активності, її наслідків та їх прогноз. — Кіровоград : Поліграф-Сервіс, 2009. — 28 с.

---

## Zalmen Efimovich Filier

Volodymyr Vynnychenko Central Ukrainian State Pedagogical University,  
Retired Professor, Israel.

### **What we have been able to do in the years of teaching**

Abstract Considered 66 years of experience in teaching the author. His main achievements are the individuality of homework of students (students), solving real problems with them, creative search and publication of results. In the course of teaching, new approaches in mathematics and its applications have matured.

**Keywords:** *individuality of works, real tasks, search and publications.*