

УДК 519.175

**Кадубовський О.А., Сілін Є.С., Гриценко Т.Ю.**<sup>1</sup> кандидат фіз.-мат. н., доцент кафедри математики та інформатики, ДВНЗ «ДДПУ»  
e-mail: [kadubovs@ukr.net](mailto:kadubovs@ukr.net), ORCID 000-0003-2045-810X<sup>2</sup> кандидат фіз.-мат. н., доцент кафедри математики та інформатики, ДВНЗ «ДДПУ»  
e-mail: [silin-evgen@meta.ua](mailto:silin-evgen@meta.ua), ORCID 0000-0003-2470-2704<sup>3</sup> студент 4 курсу фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»  
e-mail: [taras.gritsenko@gmail.com](mailto:taras.gritsenko@gmail.com), ORCID 0000-0002-3199-2730

## ПРО ЧИСЛО ДВОКОЛЬОРОВИХ ХОРДОВИХ $O$ -ДІАГРАМ РОДУ 4 ТА СУМІЖНІ ПИТАННЯ

В статті розглядається клас 2-кольорових хордових  $O$ -діаграм (з  $n$  хордами) роду 4, які мають  $l$  сірих (чорних) та  $k$  чорних (відповідно сірих) циклів. Вперше встановлено явні формули для підрахунку числа діаграм із зазначеного класу та з класу  $O$ -діаграм роду 4, які мають один сірий (чорний) та  $(n-8)$  чорних (відповідно сірих) циклів. Для простих  $n > 10$  встановлено явні формули для підрахунку числа неізоморфних (нееквівалентних відносно дії циклічної групи порядку  $n$ ) діаграм із зазначених класів. Крім того, для початкових натуральних  $n$  наведено точні значення числа таких діаграм, а для простих  $10 < n < 44$  – точні значення числа неізоморфних діаграм із зазначених класів.

**Ключові слова:** 2-кольорова хордова  $O$ -діаграма з  $n$  хордами, рід діаграми, цикл діаграми, циклічна група.

### Вступ

Добре відомо, що хордові діаграми ефективно використовують в багатьох галузях науки, зокрема математиці (топології, теорії вузлів), фізиці, біології, генетиці тощо (напр. [1], [7], [9]).

Нагадаємо, що хордовою діаграмою порядку  $n$  або, коротко,  $n$ -діаграмою називають конфігурацію на площині, що складається з кола,  $2n$  точок на ньому (які є вершинами правильного  $2n$ -кутника) та  $n$  хорд, що сполучають вказані точки. Хордові діаграми називають ізоморфними, якщо одну можна одержати з іншої в результаті повороту.

Питаннями переліку певних класів хордових  $n$ -діаграм (відносно дії циклічної групи порядку  $2n$  та дієдральної групи порядку  $4n$ ) займалась ціла низка відомих математиків, зазначених, наприклад, в роботі [12].

Слід констатувати, що одержання явних формул для підрахунку числа неізоморфних (а тому і нееквівалентних),  $n$ -діаграм фіксованого роду  $g$  (за винятком роду 0; 1 та максимального роду) виявилось досить складною задачею і до сьогодні нерозв'язаною проблемою.

Крім того, нерозв'язними залишаються й задачі про підрахунок числа неізоморфних двокольорових хордових  $O$ -діаграм фіксованого роду  $g$  (за винятком нульового та максимального роду) з наперед заданими числами циклів 2 кольорів.

**Метою** статті є встановлення явних формул для підрахунку числа двокольорових хордових  $O$ -діаграм роду 4 з наперед заданими числами циклів 2 кольорів та підрахунку числа неізоморфних таких діаграм.

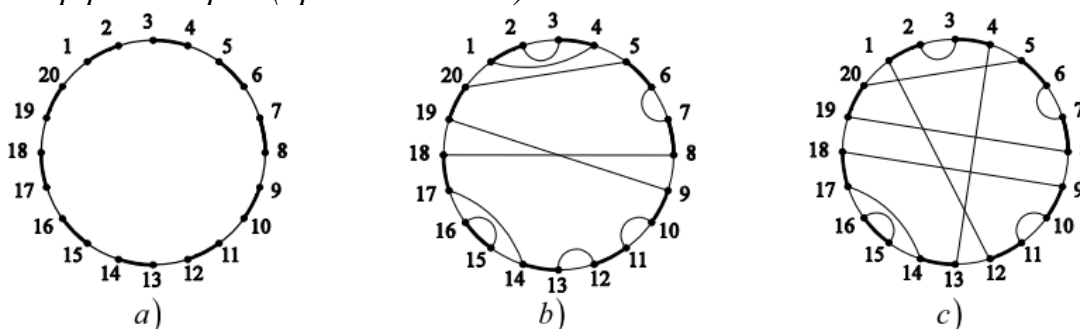
## 1. Основні поняття та попередні відомості

**Означення 1.** Коло з  $2n$  точками на ньому (що є вершинами правильного  $2n$ -кутника), дуги якого по чергові розфарбовані у два кольори (чорний і сірий) та фіксованою нумерацією вершин за годинниковою стрілкою, будемо називати двокольоровим  $2n$ -шаблоном.

$2$ -кольоровою хордовою  $n$ -діаграмою будемо називати  $n$ -діаграму, побудовану на основі двокольорового  $2n$ -шаблону.

**Означення 2.**  $2$ -кольорову  $n$ -діаграму, яка не містить (містить) хорди, що сполучає вершини з номерами однакової парності, називають  $O$ -діаграмою ( $N$ -діаграмою).

**Означення 3.** «Чорним» («сірим») циклом  $2$ -кольорової діаграми називатимемо послідовність хорд та чорних (сірих) дуг, які утворюють гомеоморфний образ (орієнтованого) кола.



**Рис. 1.:** до визначень 1–3.

a) – двокольоровий 20-шаблон;

b) –  $N$ -діаграма (з 10 хордами), яка має 7 сірих та 3 чорних циклів;

c) –  $O$ -діаграма (з 10 хордами), яка має 6 сірих та 3 чорних циклів.

**Означення 4.** Родом  $2$ -кольорової  $O$ -діаграми будемо називати ціле число  $g$ , яке визначається рівністю

$$2g = n + 1 - l - k. \quad (1.1)$$

**Означення 5.** Множину  $O$ -діаграм з  $n$  хордами (побудованих на  $2$ -кольоровому  $2n$ -шаблоні), які мають точно  $l$  сірих (чорних) та  $k$  чорних (відповідно сірих) циклів будемо позначати  $\mathfrak{S}_{k;l}^{n,g}$ .

Як впливає з роботи [11], число  $B_g(l;k)$  діаграм з класу  $\mathfrak{S}_{k;l}^{n,g}$  співпадає з величиною  $N \cdot B(t;n;N)$  (при  $l = t$ ;  $k = n$ ;  $n = N$ ) в термінах роботи [7] та з величиною  $Vi(\ell, t, n)$  (при  $l = \ell$ ;  $k = t$ ;  $n = n$ ) в термінах роботи [2].

Більш детально з основними поняттями та попередніми відомостями з теорії переліку двокольорових хордових діаграм, можна ознайомитися, наприклад, в роботах [8 – 14].

У 1997 р. в роботі [7, С. 4] вперше встановлено рекурентні формули, за допомогою яких є принципово можливим підрахунок числа діаграм з класу  $\mathfrak{S}_{k;l}^{n,4}$  ( $2g = n + 1 - l - k$ ). Крім того, для початкових  $g = 0; 1; 2; 3$  в [7, С. 8-9] встановлено наступні явні формули, які пізніше також були одержані та уточнені й в роботі [2, С. 833]

$$B_0(l; k) = \frac{1}{n} C_n^{l-1} C_n^{k-1}. \quad (1.2)$$

де  $n = l + k - 1$  ( $g = 0$ );

$$B_1(l; k) = \frac{1}{3!} \cdot C_{n+1}^2 C_{n-1}^{l-1} C_{n-1}^{k-1}, \quad (1.3)$$

де  $n = l + k + 1$  ( $g = 1$ );

$$B_2(l; k) = \frac{U_2(l; k)}{6 \cdot 5!} \cdot C_{n+1}^2 C_{n-1}^{l-1} C_{n-1}^{k-1}, \quad (1.4)$$

де  $n = l + k + 3$  ( $g = 2$ ), а

$$U_2(l; k) = 5lk(l+k) + 13(l^2 + k^2) + 47lk + 86(l+k) + 129;$$

$$B_3(l; k) = \frac{U_3(l, k)}{36 \cdot 7!} \cdot C_{n+1}^2 C_{n-1}^{l-1} C_{n-1}^{k-1}, \quad (1.5)$$

де  $n = l + k + 5$  ( $g = 3$ ), а

$$\begin{aligned} U_3(l; k) = & \\ = & 70l^3k^3 + 35l^2k^2(l^2 + k^2) + 1260l^2k^2(l+k) + 273lk(l^3 + k^3) + \\ & + 6512lk(l^2 + k^2) + 502(l^4 + k^4) + 13410l^2k^2 + 54123lk(l+k) + 9978(l^3 + k^3) + \\ & + 185554lk + 71842(l^2 + k^2) + 219918(l+k) + 238480. \end{aligned}$$

В роботі [3, С. 15/888] для величин  $B_g(l; k)$  встановлено справедливість наступного рекурентного співвідношення

$$\begin{aligned} 2g \cdot B_g(l; k) = & \\ = & \sum_{p=0}^{g-1} C_{2g-2p+1}^{2g-2p+1} \cdot B_p(2g-2p+l; k) + \sum_{p=0}^{g-1} C_{2g-2p+k}^{2g-2p+k} \cdot B_p(l; 2g-2p+k). \quad (1.6) \end{aligned}$$

**Зауваження 1.** Як вже зазначалося раніше, при довільному цілому  $g \geq 0$  аргументи для величини  $B_g(l; k)$  пов'язано співвідношенням  $n = 2g - 1 + l + k$ . Більше того, при довільному  $0 \leq p \leq g - 1$  аргументи для величин  $B_p(2g - 2p + l; k)$  і  $B_p(l; 2g - 2p + k)$  пов'язано наступними співвідношеннями:

$$n_{p,1} = 2p - 1 + (2g - 2p + l) + k = n; \quad n_{p,2} = 2p - 1 + l + (2g - 2p + k) = n.$$

Тобто, для всіх величин  $B_q(x; y)$  в (1.6) аргумент

$$n_q = 2q - 1 + x + y = 2g - 1 + l + k = n.$$

## 2. Основна частина

З урахуванням результатів робіт [7], [2] та співвідношень (1.2) – (1.5), для натуральних  $g$ ,  $l$  і  $k$  величину  $B_g(l; k)$  можна подати у вигляді

$$B_g(l; k) = \frac{C_{n+1}^2}{6^{g-1} \cdot (2g+1)! \cdot \lambda(g)} \cdot C_{n-1}^{l-1} C_{n-1}^{k-1} \cdot U_g(l, k), \quad (2.1)$$

де  $U_g(l, k)$  – многочлен степеня  $(3g-3)$ ,  $n = 2g + l + k - 1$ , а  $\lambda(g)$  – такий числовий множник, за допомогою якого досягається цілісність коефіцієнтів многочлену  $U_g(l, k)$ .

Не важко перевірити, що для випадків  $g = 0; 1; 2; 3$  числовий множник  $\lambda(g) \equiv 1$ , а многочлени  $U_g(l, k)$  набувають відповідно вид

$$U_0(l, k) = \frac{1}{3lk(l+k)}; \quad (2.2)$$

$$U_1(l, k) = 1; \quad (2.3)$$

$$U_2(l, k) = 5lk(l+k) + 13(l^2 + k^2) + 47lk + 86(l+k) + 129; \quad (2.4)$$

$$U_3(l, k) = 70l^3k^3 + 35l^2k^2(l^2 + k^2) + 1260l^2k^2(l+k) + 273lk(l^3 + k^3) + 6512lk(l^2 + k^2) + 502(l^4 + k^4) + 13410l^2k^2 + 54123lk(l+k) + 9978(l^3 + k^3) + 185554lk + 71842(l^2 + k^2) + 219918(l+k) + 238480. \quad (2.5)$$

Очевидно, що для знаходження явної формули для  $B_4(l; k)$  досить встановити явну формулу для  $U_4(l, k)$ . Задля цього, використовуючи (1.6) і (2.1) та, вважаючи  $\lambda(g) = 1 \quad \forall g \geq 1$ , встановимо (з урахуванням зауваження 1) рекурентне співвідношення для  $U_g(l, k)$ . А саме

$$2g \cdot \frac{C_{n+1}^2}{6^{g-1} \cdot (2g+1)!} C_{n-1}^{l-1} C_{n-1}^{k-1} \cdot U_g(l, k) =$$

$$+ \sum_{p=0}^{g-1} C_{2g-2p+l}^{l-1} \cdot \frac{C_{n+1}^2}{6^{p-1} \cdot (2p+1)!} C_{n-1}^{2g-2p+l-1} C_{n-1}^{k-1} \cdot U_p(2g-2p+l, k) +$$

$$+ \sum_{p=0}^{g-1} C_{2g-2p+k}^{k-1} \cdot \frac{C_{n+1}^2}{6^{p-1} \cdot (2p+1)!} C_{n-1}^{l-1} C_{n-1}^{2g-2p+k-1} \cdot U_g(l, 2g-2p+k);$$

$$2g \cdot \frac{1}{6^{g-1} \cdot (2g+1)!} C_{n-1}^{l-1} C_{n-1}^{k-1} \cdot U_g(l, k) =$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{p=0}^{g-1} C_{2g-2p+l}^{l-1} \cdot \frac{1}{6^{p-1} \cdot (2p+1)!} C_{n-1}^{2g-2p+l-1} C_{n-1}^{k-1} \cdot U_p(2g-2p+l, k) + \\
 &+ \sum_{p=0}^{g-1} C_{2g-2p+k}^{k-1} \cdot \frac{1}{6^{p-1} \cdot (2p+1)!} C_{n-1}^{l-1} C_{n-1}^{2g-2p+k-1} \cdot U_p(l, 2g-2p+k); \\
 & \qquad \qquad \qquad C_{n-1}^{l-1} C_{n-1}^{k-1} \cdot U_g(l, k) = \\
 &= \sum_{p=0}^{g-1} \frac{6^{g-p} \cdot (2g+1)!}{2g(2p+1)!} C_{2g-2p+l}^{l-1} C_{n-1}^{2g-2p+l-1} C_{n-1}^{k-1} U_p(2g-2p+l, k) + \\
 &+ \sum_{p=0}^{g-1} \frac{6^{g-p} \cdot (2g+1)!}{2g(2p+1)!} C_{2g-2p+k}^{k-1} C_{n-1}^{l-1} C_{n-1}^{2g-2p+k-1} \cdot U_p(l, 2g-2p+k); \\
 & \qquad \qquad \qquad U_g(l, k) = \\
 &= \sum_{p=0}^{g-1} \frac{6^{g-p} \cdot (2g+1)!}{2g(2p+1)!} \frac{(2g-2p+l)(n-l)!}{(2g-2p+1)!(n-2g+2p-l)!} U_p(2g-2p+l, k) + \\
 &+ \sum_{p=0}^{g-1} \frac{6^{g-p} \cdot (2g+1)!}{2g(2p+1)!} \frac{(2g-2p+k)(n-k)!}{(2g-2p+1)!(n-2g+2p-k)!} \cdot U_p(l, 2g-2p+k).
 \end{aligned}$$

Оскільки  $2g = n + 1 - l - k$ , то

$$(n - 2g + 2p - l) = 2p + k - 1,$$

$$(n - 2g + 2p - k) = 2p + l - 1,$$

а останнє співвідношення можна подати у вигляді

$$\begin{aligned}
 & \qquad \qquad \qquad U_g(l, k) = \\
 &= \sum_{p=0}^{g-1} \frac{6^{g-p} \cdot (2g+1)!}{2g(2p+1)!(2g-2p+1)!} \frac{(k+2g-1)!(2g-2p+l)}{(k+2p-1)!} U_p(2g-2p+l, k) + \\
 &+ \sum_{p=0}^{g-1} \frac{6^{g-p} \cdot (2g+1)!}{2g(2p+1)!(2g-2p+1)!} \frac{(l+2g-1)!(2g-2p+k)}{(l+2p-1)!} \cdot U_p(l, 2g-2p+k),
 \end{aligned}$$

або ж в остаточному вигляді

$$\begin{aligned}
 & \qquad \qquad \qquad U_g(l, k) = \\
 &= \sum_{p=0}^{g-1} \frac{6^{g-p}}{4g(g+1)} C_{2g+2}^{2p+1} \frac{(k+2g-1)!}{(k+2p-1)!} (l+2g-2p) U_p(l+2g-2p, k) + \\
 &+ \sum_{p=0}^{g-1} \frac{6^{g-p}}{4g(g+1)} C_{2g+2}^{2p+1} \frac{(l+2g-1)!}{(l+2p-1)!} (k+2g-2p) \cdot U_p(l, k+2g-2p).
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

## 2.1. Явна формула для числа діаграм з класу $\mathfrak{S}_{k;l}^{n,4}$

**Лема 1.** У випадку  $g = 4$  многочлен  $U_4(l; k)$  можна подати у вигляді

$$\begin{aligned}
 & U_4(l; k) = \\
 & = 4725l^4k^4(l+k) + 1575l^3k^3(l^3+k^3) + \\
 & + 24570l^2k^2(l^4+k^4) + 226800l^4k^4 + 137970l^3k^3(l^2+k^2) \\
 & + 122301lk(l^5+k^5) + 1362879l^2k^2(l^3+k^3) + 381068l^3k^3(l+k) + \\
 & + 191754(l^6+k^6) + 28774872l^2k^2(l^2+k^2) + 47882394l^3k^3 + 5492826lk(l^4+k^4) \\
 & + 7630200(l^5+k^5) + 300923028l^2k^2(l+k) + 98862894lk(l^3+k^3) + \\
 & + 123810228(l^4+k^4) + 1654128756l^2k^2 + 911844216lk(l^2+k^2) + \\
 & + 1044382896(l^3+k^3) + 4531038957lk(l+k) + \\
 & + 4805058618(l^2+k^2) + 11436755742lk + \\
 & + 11353272984(l+k) + 10657853640. \quad (2.1.1)
 \end{aligned}$$

**Доведення.** З урахуванням (2.1) та без втрати загальності, величину  $B_4(l; k)$  будемо шукати за допомогою співвідношення

$$B_4(l; k) = \frac{1}{6^3 \cdot 9! \cdot 5} \cdot C_{n+1}^2 C_{n-1}^{l-1} C_{n-1}^{k-1} \cdot U_4(l, k), \text{ де } n = l + k + 7.$$

Тоді, з урахуванням (2.6), невідомий многочлен  $U_4(l, k)$  будемо шукати у вигляді

$$\begin{aligned}
 & U_4(l, k) = \\
 & = \sum_{p=0}^3 \frac{6^{4-p} \cdot 9! \cdot 5}{8 \cdot (2p+1)! (9-2p)!} \frac{(8-2p+l)(k+7)!}{(k+2p-1)!} U_p(8-2p+l, k) + \\
 & + \sum_{p=0}^{g-1} \frac{6^{4-p} \cdot 9! \cdot 5}{8 \cdot (2p+1)! (9-2p)!} \frac{(8-2p+k)(l+7)!}{(l+2p-1)!} \cdot U_p(l, 8-2p+k) = \\
 & = \sum_{p=0}^3 I_p + \sum_{p=0}^3 J_p = \sum_{p=0}^3 (I_p + J_p) = \sum_{p=0}^3 W_p. \quad (2.1.2)
 \end{aligned}$$

1) При  $p = 0$  маємо, що

$$\begin{aligned}
 & I_0 = \frac{6^4 \cdot 9! \cdot 5}{8 \cdot 1! 9!} \cdot \frac{(8+l)(k+7)!}{(k-1)!} \cdot U_0(8+l, k) = \\
 & = 810 \cdot \frac{(8+l)(k+7)!}{(k-1)!} \cdot \frac{1}{3(8+l)k(8+l+k)} = 270 \cdot \frac{(k+7)!}{k!} \cdot \frac{1}{(8+l+k)}.
 \end{aligned}$$

$$I_0 = \frac{270}{n+1}(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)(k+5)(k+6)(k+7).$$

Аналогічно, доданок  $J_0$  має вид

$$J_0 = \frac{270}{n+1}(l+1)(l+2)(l+3)(l+4)(l+5)(l+6)(l+7).$$

Виконавши елементарні перетворення (з урахуванням рівності  $n+1=8+l+k$ ) доданок  $W_0$  можна подати у вигляді

$$\begin{aligned} W_0 &= I_0 + J_0 = \\ &= 270(l^6 + k^6) - 270lk(l^4 + k^4) - 270l^3k^3 + 270l^2k^2(l^2 + k^2) + \\ &+ 5400(l^5 + k^5) - 3240lk(l^3 + k^3) + 1080l^2k^2(l+k) + 43740(l^4 + k^4) + 9180l^2k^2 - \\ &- 17820lk(l^2 + k^2) + 179280(l^3 + k^3) - 36720lk(l+k) + 393390(l^2 + k^2) - \\ &- 99630lk + 398520(l+k) + 340200. \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

2) При  $p=1$  маємо, що

$$I_1 = \frac{6^3 \cdot 9! \cdot 5}{8 \cdot 3!7!} \cdot \frac{(6+l)(k+7)!}{(k+1)!} \cdot U_1(6+l, k) = 1620 \cdot \frac{(6+l)(k+7)!}{(k+1)!} \cdot U_1(6+l, k).$$

Оскільки  $U_1(x, y) \equiv 1$ , то

$$I_1 = 1624(6+l)(k+2)(k+3)(k+4)(k+5)(k+6)(k+7),$$

$$J_1 = 1624(6+k)(l+2)(l+3)(l+4)(l+5)(l+6)(l+7).$$

Виконавши елементарні перетворення (з урахуванням рівності  $n+1=8+l+k$ ) доданок  $W_1$  можна подати у вигляді

$$\begin{aligned} W_1 &= I_1 + J_1 = \\ &= 1620lk(l^5 + k^5) + 9720(l^6 + k^6) + 43740lk(l^4 + k^4) + 262440(l^5 + k^5) + \\ &+ 477900lk(l^3 + k^3) + 2867400(l^4 + k^4) + 2697300lk(l^2 + k^2) + \\ &+ 16183800(l^3 + k^3) + 8268480lk(l+k) + 49610880(l^2 + k^2) + 26010720lk + \\ &+ 86196960(l+k) + 97977600 \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

3) При  $p=2$  маємо, що

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{36 \cdot 9! \cdot 5}{8 \cdot 5!5!} \cdot \frac{(4+l)(k+7)!}{(k+3)!} \cdot U_2(4+l, k) = \\ &= 567 \cdot (4+l)(k+4)(k+5)(k+6)(k+7) \cdot U_2(4+l, k). \end{aligned}$$

Аналогічно, доданок  $J_2$  має вид

$$J_2 = 567 \cdot (4+k)(l+4)(l+5)(l+6)(l+7) \cdot U_2(l, 4+k), \text{ де}$$

$$U_2(x, y) = 5xy(x+y) + 13(x^2 + y^2) + 47xy + 86(x+y) + 129.$$

Виконавши елементарні перетворення (з урахуванням рівності  $n+1=8+l+k$ ) доданок  $W_2$  можна подати у вигляді

$$\begin{aligned}
W_2 &= I_2 + J_2 = \\
&= 2835l^3k^3(l^2 + k^2) + 2835l^2k^2(l^4 + k^4) + 123039l^2k^2(l^3 + k^3) + 69741l^3k^3(l + k) + \\
&+ 30051lk(l^5 + k^5) + 1339254l^3k^3 + 1979397l^2k^2(l^2 + k^2) + 74844(l^6 + k^6) + \\
&+ 1059156lk(l^4 + k^4) + 2449440(l^5 + k^5) + 14952924lk(l^3 + k^3) + \\
&+ 18815328l^2k^2(l + k) + 32604768(l^4 + k^4) + 131299056l^2k^2 + \\
&+ 115479756lk(l^2 + k^2) + 231635376(l^3 + k^3) + 563944437lk(l + k) + \\
&+ 966827988(l^2 + k^2) + 1711249092lk + 2346128064(l + k) + 2594773440. \quad (2.1.5)
\end{aligned}$$

4) При  $p = 3$  маємо, що

$$I_3 = 45 \cdot (2 + l)(k + 7)(k + 6) \cdot U_3(2 + l, k).$$

Аналогічно, доданок  $J_3$  має вид

$$J_3 = 45 \cdot (2 + k)(l + 7)(l + 6) \cdot U_3(l, 2 + k), \text{ де}$$

$$\begin{aligned}
U_3(x, y) &= \\
&= 70x^3y^3 + 35x^2y^2(x^2 + y^2) + 1260x^2y^2(x + y) + 273xy(x^3 + y^3) + \\
&+ 6512xy(x^2 + y^2) + 502(x^4 + y^4) + 13410x^2y^2 + 54123xy(x + y) + 9978(x^3 + y^3) + \\
&+ 185554xy + 71842(x^2 + y^2) + 219918(x + y) + 238480.
\end{aligned}$$

Виконавши елементарні перетворення (з урахуванням рівності  $n + 1 = 8 + l + k$ ) доданок  $W_3$  можна подати у вигляді

$$\begin{aligned}
W_3 &= I_3 + J_3 = \\
&= 4725l^4k^4(l + k) + 1575l^3k^3(l^3 + k^3) + \\
&+ 226800l^4k^4 + 135135l^3k^3(l^2 + k^2) + 21735l^2k^2(l^4 + k^4) + \\
&+ 3740940l^3k^3(l + k) + 1239840l^2k^2(l^3 + k^3) + 90630lk(l^5 + k^5) + \\
&+ 46543410l^3k^3 + 26795205l^2k^2(l^2 + k^2) + 4390200lk(l^4 + k^4) + 106920(l^6 + k^6) + \\
&+ 282106620l^2k^2(l + k) + 83435310lk(l^3 + k^3) + 4912920(l^5 + k^5) + \\
&+ 1522820520l^2k^2 + 793684980lk(l^2 + k^2) + 88294320(l^4 + k^4) + \\
&+ 3958862760lk(l + k) + 796384440(l^3 + k^3) + 3788226360(l^2 + k^2) + \\
&+ 9699595560lk + 8920549440(l + k) + 7964762400. \quad (2.1.6)
\end{aligned}$$

З урахуванням (2.1.2) – (2.1.6), маємо справедливість (2.1.1).

**Зауваження 2** В правильності знайденого многочлену  $U_4(l, k)$  можна переконатися ще й шляхом безпосередньої перевірки наступного рекурентного співвідношення, встановленого в роботі [7, С. 4] для довільного роду  $g \geq 1$  (з відповідними граничними умовами)



$$\begin{aligned}
 & (n+1)B_g(k;l;n) = \\
 & = (n-2)(n-1)^2 \cdot B_{g-1}(k;l;n-2) + \\
 & \quad + (2n-1) \cdot (B_g(k-1;l;n-1) + B_g(k;l-1;n-1)) - \\
 & \quad - (n-2) \cdot (B_g(k-2;l;n-2) - 2B_g(k-1;l-1;n-2) + B_g(k;l-2;n-2)).
 \end{aligned}$$

**Наслідок 1.** Для довільних натуральних  $l$  і  $k$  число  $\|\mathfrak{S}_{k;l}^{n,4}\|$  діаграм з класу  $\mathfrak{S}_{k;l}^{n,4}$ , де  $n = l + k + 7 \geq 9$ , можна обчислити за формулою

$$\|\mathfrak{S}_{k;l}^{n,4}\| = B_4(l;k) = \frac{1}{5 \cdot 6^3 \cdot 9!} C_{n+1}^2 C_{n-1}^{l-1} C_{n-1}^{k-1} \cdot U_4(l,k), \tag{2.1.7}$$

де значення многочлену  $U_4(l,k)$  визначається за допомогою співвідношення (2.1.1).

**Таблиця 1.**

**Значення величини  $B_4(l;k)$  для початкових натуральних  $l$  і  $k$ , таких що  $9 \leq l + k + 7 \leq 16$ , де  $n = l + k + 7$**

$n$ $l$	9	10	11	12	13	14	15	16
1	8064	193248	2286636	18128396	109425316	539651112	2273360089	8433097673
2		193248	5458464	75220860	687238552	4736419688	26453440013	125293516348
3			2286636	75220860	1194737544	12465308856	97310966753	611168481924
4				18128396	687238552	12465308856	147323751575	1293392910810
5					109425316	4736419688	97310966753	1293392910810
6						539651112	26453440013	611168481924
7							2273360089	125293516348
8								8433097673

**2.2. Явна формула для числа діаграм з класу  $\mathfrak{S}_{n-8;1}^{n,4}$**

У випадку  $g = 4$  та  $l = 1$  величина  $k = n - 8$ . Тому при  $l = 1$  та  $k = n - 8$  многочлен  $U_4(l,k)$  набуває вид

$$\begin{aligned}
 & U_4(1,n-8) = \\
 & = 22680(15n^6 - 75n^5 - 135n^4 + 527n^3 + 768n^2 - 668n - 1008). \tag{2.1.8}
 \end{aligned}$$

З урахуванням співвідношень (2.1.7) та (2.1.8), має місце наступне твердження

**Твердження 1.** Для довільного натурального  $n \geq 9$  число  $\|\mathfrak{S}_{n-8;1}^{n,4}\|$  діаграм з класу  $\mathfrak{S}_{n-8;1}^{n,4}$  можна обчислити за формулою

$$\begin{aligned}
 & \|\mathfrak{S}_{n-8;1}^{n,4}\| = B_4(1;n-8) = \\
 & = \frac{1}{384} \cdot C_{n+1}^{10} \cdot (15n^6 - 75n^5 - 135n^4 + 527n^3 + 768n^2 - 668n - 1008). \tag{2.1.9}
 \end{aligned}$$

**Зауваження 3** Оскільки  $n \geq 9$ , то максимальна довжина чорного циклу діаграми з класу  $\mathfrak{S}_{n-8,1}^{n,4}$  може становити лише 9.

Дійсно, якщо через  $t$  позначити довжину найдовшого з чорних циклів, то на решту  $(n-9)$  чорних циклів (можливо одного) у сукупності припадатиме  $(n-t)$  чорних дуг двокольорового  $2n$ -шаблону, а тому повинна мати місце нерівність  $n-t \geq n-9$ . Звідки й випливає, що  $t \leq 9$ .

Нехай далі  $t_q$  – кількість чорних циклів довжини  $q$ , де  $q \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ . Тоді, очевидно, що справджуються рівності

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^9 t_i = n-8 \\ t_1 + 2t_2 + 3t_3 + 4t_4 + 5t_5 + 6t_6 + 7t_7 + 8t_8 + 9t_9 = n \end{cases}$$

звідки

$$\begin{cases} t_1 = n-8 - \sum_{i=2}^9 t_i \\ 8t_9 + 7t_8 + 6t_7 + 5t_6 + 4t_5 + 3t_4 + 2t_3 + t_2 = 8 \end{cases} \quad (2.1.10)$$

Оскільки  $t_q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , то можливі цілі невід'ємні розв'язки  $(t_1; t_2; \dots; t_9)$  системи (2.1.9) вичерпуються наступними

$$\begin{array}{lll} (n-9; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 1) & (n-10; 0; 0; 0; 2; 0; 0; 0; 0) & (n-13; 3; 1; 1; 0; 0; 0; 0; 0) \\ (n-10; 1; 0; 0; 0; 0; 0; 1; 0) & (n-11; 1; 0; 1; 1; 0; 0; 0; 0) & (n-12; 1; 2; 1; 0; 0; 0; 0; 0) \\ (n-10; 0; 1; 0; 0; 0; 1; 0; 0) & (n-11; 0; 2; 0; 1; 0; 0; 0; 0) & (n-14; 5; 0; 1; 0; 0; 0; 0; 0) \\ (n-11; 2; 0; 0; 0; 0; 1; 0; 0) & (n-12; 2; 1; 0; 1; 0; 0; 0; 0) & (n-12; 0; 4; 0; 0; 0; 0; 0; 0) \\ (n-10; 0; 0; 1; 0; 1; 0; 0; 0) & (n-13; 4; 0; 0; 1; 0; 0; 0; 0) & (n-13; 2; 3; 0; 0; 0; 0; 0; 0) \\ (n-11; 1; 1; 0; 0; 1; 0; 0; 0) & (n-11; 0; 1; 2; 0; 0; 0; 0; 0) & (n-14; 4; 2; 0; 0; 0; 0; 0; 0) \\ (n-12; 3; 0; 0; 0; 1; 0; 0; 0) & (n-12; 2; 0; 2; 0; 0; 0; 0; 0) & (n-15; 6; 1; 0; 0; 0; 0; 0; 0) \\ & & (n-16; 8; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0) \end{array}$$

**Зауваження 4.** Діаграма з класу  $\mathfrak{S}_{n-8,1}^{n,4}$  ( $n \geq 9$ ) може мати лише один з наступних наборів чорних циклів:

- 1) один 9-цикл (довжини 9) та  $(n-9)$  1-циклів (довжини 1);
- 2) один 8-цикл, один 2-цикл та  $(n-10)$  1-циклів;
- 3) один 7-цикл, один 3-цикл та  $(n-10)$  1-циклів;
- 4) один 7-цикл, два 2-циклів та  $(n-11)$  1-циклів;
- 5) один 6-цикл, один 4-цикл та  $(n-10)$  1-циклів;
- 6) один 6-цикл, один 3-цикл, один 2-цикл та  $(n-11)$  1-циклів;

- 7) один 6 – цикл, три 2 – циклів та  $(n - 12)$  1 – циклів;
- 8) два 5 – циклів та  $(n - 10)$  1 – циклів;
- 9) один 5 – цикл, один 4 – цикл, один 2 – цикл та  $(n - 11)$  1 – циклів;
- 10) один 5 – цикл, два 3 – циклів та  $(n - 11)$  1 – циклів;
- 11) один 5 – цикл, один 3 – цикл, два 2 – циклів та  $(n - 12)$  1 – циклів;
- 12) один 5 – цикл, чотири 2 – циклів та  $(n - 13)$  1 – циклів;
- 13) два 4 – циклів, один 3 – цикл та  $(n - 11)$  1 – циклів;
- 14) два 4 – циклів, два 2 – циклів та  $(n - 12)$  1 – циклів;
- 15) один 4 – цикл, один 3 – цикл, три 2 – циклів та  $(n - 13)$  1 – циклів;
- 16) один 4 – цикл, два 3 – циклів, один 2 – цикл та  $(n - 12)$  1 – циклів;
- 17) один 4 – цикл, п'ять 2 – циклів та  $(n - 14)$  1 – циклів;
- 18) чотири 3 – циклів та  $(n - 12)$  1 – циклів;
- 19) три 3 – циклів, два 2 – циклів та  $(n - 13)$  1 – циклів;
- 20) два 3 – циклів, чотири 2 – циклів та  $(n - 14)$  1 – циклів;
- 21) один 3 – цикл, шість 2 – циклів та  $(n - 15)$  1 – циклів;
- 22) вісім 2 – циклів та  $(n - 16)$  1 – циклів.

**Зауваження 5.** В подальшому з метою уникнення непотрібних нагромаджень (при візуалізації відповідних типів діаграм) чорні 1-цикли будемо зображати у вигляді звичайної чорної дуги  $2n$ -шаблону (та розуміти як дугу, кінці якої сполучено хордою) – рис.2 а), b), c).

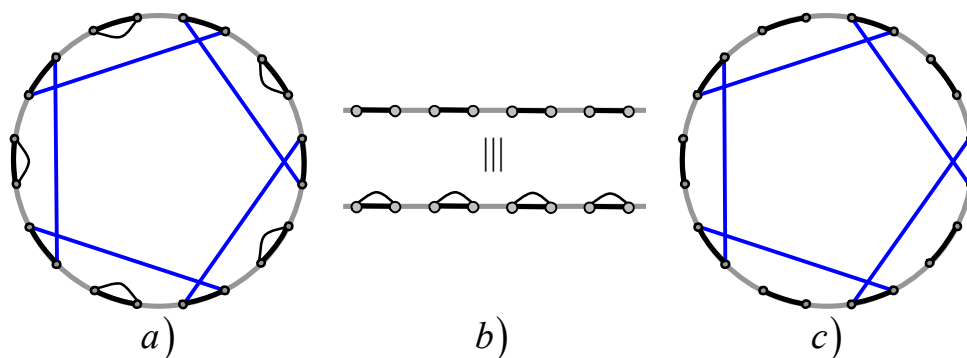


Рис. 2.: до зауваження 5.

На рисунку 3 нижче представлено реалізацію кожного із зазначених 22 підкласів (наборів чорних циклів) на прикладі діаграм з класу  $\mathfrak{S}_{10;1}^{18,4}$ .

Слід також відзначити, що наведені приклади діаграм з підкласів  $T_1, T_2, \dots, T_{22}$  не вичерпують всіх можливих їх типів.

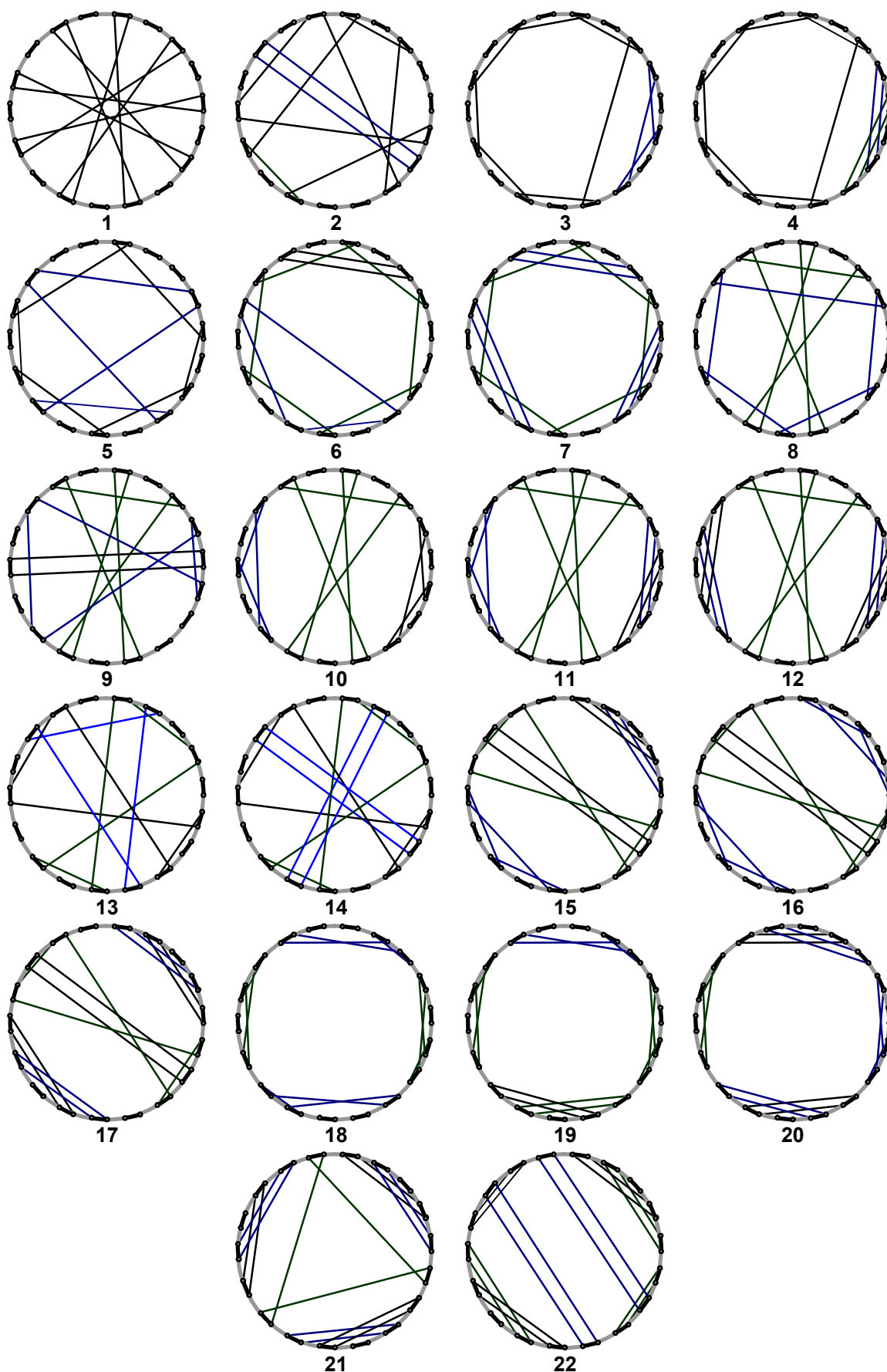


Рис. 3.: представники підкласів  $T_i$  діаграм з класу  $\mathfrak{S}_{10;1}^{18,4}$

Таким чином, серед діаграм з класу  $\mathfrak{S}_{n-8;1}^{n,4}$  можна виділити 22 зазначених вище характеристичних підкласів –  $T_1, T_2, \dots, T_{22}$  відповідно. Причому: при  $n=9$  діаграми вичерпуються лише підкласом  $T_1$ ; при  $n=10$  – підкласами  $T_1$  та  $T_2, T_3, T_5, T_8$ ; при  $n=11$  – підкласами  $T_1, T_2, T_3, T_5, T_8$  та  $T_4, T_6, T_9, T_{10}, T_{13}$ ; при  $n=12$  – підкласами  $T_1, T_2, T_3, T_5, T_8, T_4, T_6, T_9, T_{10}, T_{13}$  та  $T_7, T_{11}, T_{14}, T_{16}, T_{18}$ ; при  $n=13$  – підкласами  $T_1, T_2, T_3, T_5, T_8, T_4, T_6, T_9, T_{10}, T_{13}, T_7, T_{11}, T_{14}, T_{16}, T_{18}$  та  $T_{12}, T_{15}, T_{19}$ ; при  $n=14$  – підкласами  $T_1 - T_{16}, T_{18}, T_{19}$  та  $T_{17}, T_{20}$ ; при  $n=15$  – підкласами  $T_1 - T_{20}$  та  $T_{21}$ ; при  $n \geq 16$  – усіма підкласами  $T_1 - T_{22}$ .

### 2.3. Про число неізоморфних діаграм з класів $\mathfrak{S}_{k;l}^{n,4}, \mathfrak{S}_{n-8;l}^{n,4}$

За лемою Бернсайда (див. напр. [1], [8], [10]) число  $d^*(n)$  неізоморфних (нееквівалентних відносно дії циклічної групи порядку  $n$ ) діаграм з класу  $\mathfrak{S}_{k;l}^{n,4}$  можна знайти за допомогою співвідношення

$$d^*(n) = \frac{1}{n} \left( d(n) + \sum_{i|n, i \neq n} \varphi\left(\frac{n}{i}\right) \rho(n; i) \right), \tag{2.3.1}$$

де  $d(n) = \|\mathfrak{S}_{k;l}^{n,4}\|$ ;  $\varphi(q)$  – функція Ейлера (кількість натуральних менших за  $q$  чисел, взаємно простих із ним), а  $\rho(n; i)$  – число тих діаграм з класу  $\mathfrak{S}_{k;l}^{n,4}$ , які самосуміщуються при повороті (за годинниковою стрілкою) на кут

$$\omega(n; i) = \frac{2\pi}{2n} \cdot 2i = 2\pi \cdot \frac{i}{n}.$$

Очевидно, що для дільників  $i \neq n$  числа  $n$  кут  $\omega(n; i) \leq \pi$ . Більше того, поклавши  $j = \frac{n}{i}$ , співвідношення (2.3.1) можна подати у вигляді

$$d^*(n) = \frac{1}{n} \left( d(n) + \sum_{j|n, j \neq 1} \varphi(j) \rho\left(n; \frac{n}{j}\right) \right), \tag{2.3.2}$$

де  $\rho\left(n; \frac{n}{j}\right)$  – число діаграм з класу  $\mathfrak{S}_{k;l}^{n,4}$ , які самосуміщуються при повороті (за годинниковою стрілкою) на кут  $\omega\left(n; \frac{n}{j}\right) = \frac{2\pi}{j}$ , де  $j$  – дільник  $n$ ,  $j \neq 1$ .

В якості безпосереднього наслідку маємо справедливність наступної  
**Лема 2.** Для довільного простого  $n \geq 11$  та усіх натуральних  $l$  і  $k$ , що задовольняють умову  $l + k + 7 = n$ , число  $d^*(n)$  неізоморфних діаграм з класу  $\mathfrak{S}_{k;l}^{n,4}$  можна обчислити за формулою

$$d^*(n) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{391910400} \cdot C_{n+1}^2 C_{n-1}^{l-1} C_{n-1}^{k-1} \cdot U_4(l, k), \tag{2.3.3}$$

де значення  $U_4(l, k)$  (для зазначених  $l$  і  $k$ ) можна обчислити за допомогою співвідношення (2.1.1).

Крім того, має місце й наступне твердження

**Лема 3.** Для довільного простого  $n \geq 11$  число  $d^*(n)$  неізоморфних діаграм з класу  $\mathfrak{S}_{n-8;1}^{n,4}$  можна обчислити за формулою

$$d^*(n) = \frac{1}{384 \cdot n} \cdot C_{n+1}^{10} \times (15n^6 - 75n^5 - 135n^4 + 527n^3 + 768n^2 - 668n - 1008). \quad (2.3.4)$$

**Таблиця 2.**

**Значення числа неізоморфних діаграм з класу  $\mathfrak{S}_{k;l}^{n,4}$  для початкових простих  $n$ , де  $n = l + k + 7$**

$l \setminus n$	11	13	17	19
1	207876	8417332	1656326529	12820124031
2	496224	52864504	30541124328	342064315593
3	207876	91902888	190245911856	3210658468875
4		52864504	533914613232	14284889970780
5		8417332	746346821220	33821745529572
6			533914613232	44854181920548
7			190245911856	33821745529572
8			30541124328	14284889970780
9			1656326529	3210658468875
10				342064315593
11				12820124031

**Таблиця 3.**

**Початкові значення величин  $d(n)$  та  $d^*(n)$  для класу  $\mathfrak{S}_{n-8;1}^{n,4}$**

$n$	$d(n)$	$d^*(n)$
9	8064	
10	193248	
11	2286636	207876
12	18128396	
13	109425316	8417332
14	539651112	
15	2273360089	
16	8433097673	
17	28157550993	1656326529
18	86027797713	
19	243582356589	12820124031
20	645643728093	
23	8717558111031	379024265697
29	571325459439735	19700877911715
31	1857601347685590	59922624118890
37	40699184729646366	1099977965666118
41	238413823132382898	5814971295911778
43	538746527851970438	12528989019813266

## Висновки та прикінцеві зауваження

Таким чином, в представлений роботі для натуральних простих  $n \geq 9$  розв'язано задачі про підрахунок числа неізоморфних (нееквівалентних відносно циклічної групи порядку  $n$ ) діаграм з класів  $\mathfrak{S}_{k;l}^{n,4}$  та  $\mathfrak{S}_{n-8;1}^{n,4}$ . Крім того, для натуральних  $n = n'+1 \geq 9$  початкові значення величини  $\|\mathfrak{S}_{n-8;1}^{n,4}\|$  співпадають зі значеннями величини  $S_H(n'; n'-7)$  – «Hultman Numbers» [4] (послідовність A164652 в [6]). А, з урахуванням результатів роботи [9], встановлено явну формулу для величини  $\|\mathfrak{S}_{n-8;1}^{n,4}\| = S_H(n-1; n-8)$ , яку можна обчислити так, як це зроблено в [4] (Theorem 14), або ж в [5] (Theorem 4.1).

Подальшу роботу природно спрямувати на узагальнення одержаних результатів для класу  $\mathfrak{S}_{k;l}^{n,4}$  на випадок довільних натуральних  $l$  і  $k$ .

З урахуванням зауваження 4, цілком досяжним здається розв'язання задач про підрахунок числа неізоморфних та нееквівалентних (відносно дії дієдральної групи порядку  $2n$ ) діаграм з класу  $\mathfrak{S}_{n-8;1}^{n,4}$ .

## Література

1. Cori R., Marcus M. Counting non-isomorphic chord diagrams. *Theoretical Computer Science*. **1998**. Vol. 204. P. 55–73.
2. Goupil A., Schaeffer G. Factoring  $n$ -cycles and counting maps of given genus. *European Journal of Combinatorics*. **1998**. Vol. 19, No. 7. P. 819–834.
3. Chapuy G. A new combinatorial identity for unicellular maps, via a direct bijective approach. *Advances in Applied Mathematics*. **2011**. Vol. 47, No. 4. P. 874–893.
4. Doignon J.P., Labarre A. On Hultman Numbers. *Journal of Integer Sequences* 10 (6), article 07.6.2, 13 pages.
5. Grusea S., Labarre A. The distribution of cycles in breakpoint graphs of signed permutations. *Discrete Applied Mathematics*. **2013**. Vol. 161. P. 1448–1466.
6. The OEIS Foundation Inc., «The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences», published electronically at <http://oeis.org>
7. Адрианов Н.М. Аналог формулы Харера-Цагира для одноклеточных двукрашенных карт. *Функциональный анализ и его приложения*. **1997**. Том 31, № 3. С. 1–9.
8. Кадубовський О.А., Саприкіна Ю.С., Мазур С.Ю. Двокольорові О-діаграми з одним чорним циклом. Пошуки і знахідки. Серія: фізико-математичні науки. **2010**. Том I, Вип. 10. С. 51–60.
9. Кадубовський О.А. Перерахування топологічно нееквівалентних гладких мінімальних функцій на замкнених поверхнях. *Топологія відображень маловимірних многовидів* : Збірник праць Інституту математики НАН України. **2015**. Том 12, № 6. С. 105–145.

10. Кадубовський О.А., Баляса Н.П. Перерахування двокольорових хордових O-діаграм роду 1, які мають один чорний (або сірий) цикл, відносно дії циклічної та дієдральної груп. Збірник наукових праць фізико-математичного факультету ДДПУ. **2016**. Випуск 6. С. 31–46.
11. Кадубовський О.А., Калініченко Я.В. Перерахування двокольорових хордових O-діаграм роду 1, які мають два чорних (або сірих) циклів, відносно дії групи дієдра. Збірник наукових праць фізико-математичного факультету ДДПУ. **2018**. Випуск 8. С. 30–45.
12. Кадубовський О.А. Перерахування двокольорових хордових O-діаграм роду 1, які мають три сірих (або чорних) цикли, відносно дії групи дієдра. Збірник наукових праць фізико-математичного факультету ДДПУ. **2019**. Випуск 9. С. 25–41.
13. Кадубовський О.А., Стьопкін А.В., Кириченко А.М. Про число нееквівалентних двокольорових хордових O-діаграм роду 2, які мають один сірий (або чорний) цикл. Збірник наукових праць фізико-математичного факультету ДДПУ. **2021**. Випуск 11. С. 18–33.
14. Кадубовський О.А. Перерахування неізоморфних двокольорових хордових O-діаграм роду три з одним сірим (або чорним) циклом. Матеріали XXIII Міжнародного науково-практичного семінару імені А.Я. Петренюка, присвяченого 70-річчю Льотної академії Національного авіаційного університету (Запоріжжя – Кропивницький, 13-15 травня 2021 року) / за ред. Г.П. Донця – Кропивницький: ПП «Ексклюзив-Систем», **2021**. – С. 89 – 93. – 208 с.

---

### **Oleksandr A. Kadubovs'kyi, Yevhen S. Silin, Taras Yu. Hrytsenko**

Donbas State Pedagogical University, Sloviansk, Ukraine.

#### **On the number of two-color chord O-diagrams of genus four and related issues**

In this paper we consider 2-color chord O-diagrams (with  $n$  chords) of genus four, with have  $l$  grey (black) and  $k$  black (respectively grey) faces.

We have established explicit formulas for calculating the number of diagrams from the specified class, and from the class O-diagrams of genus 4, which have one gray (black) and  $(n-8)$  black (respectively gray) faces.

For natural of prime  $n > 10$  we have established explicit formulas for calculating the number of non-isomorphic (under the action of the rotation group / cyclic group of the order  $n$ ) diagrams from the specified classes.

In addition, for the initial prime  $n$  the exact values of the number of such diagrams are given, and for the prime  $10 < n < 44$  – the exact values of the numbers of non-isomorphic diagrams from these classes.

**Keywords:** *2 – color chord O – diagrams, genus of the diagram, faces of the diagram, cyclic group.*

---