УДК 514.112.3

Бондар Д.С., Воробйова С.І., Кадубовський О.А.

[1] *студентка 3 курсу фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»*
e-mail: bndrdiana@gmail.com, ORCID 0000-0003-1814-2325

[2] *старший викладач кафедри природничо-математичних дисциплін та методики їх викладання, Донецький ОБЛІППО*
e-mail: vorobyova@ippo.dn.ua, ORCID 0000-0002-3826-7574

[3] *кандидат фіз.-мат. н., доцент кафедри математики та інформатики, ДВНЗ «ДДПУ»*
e-mail: kadubovs@ukr.net, ORCID 000-0003-2045-810X

ПРО ОДНЕ ВАЖЛИВЕ ВІДНОШЕННЯ В ГЕОМЕТРІЇ ТРИКУТНИКА ТА СУМІЖНІ ПИТАННЯ

Стаття присвячена питанням впровадження в шкільний курс геометрії важливого відношення між довжинами відрізків, що сполучають вершину трикутника і ортоцентр та центр описаного кола і середину протилежної сторони. Здійснення впровадження пропонується шляхом вдосконалення дидактичного забезпечення певних тем шкільного курсу геометрії для учнів 8 та 9 класів закладів загальної середньої освіти. Крім того, в статі зроблено огляд існуючих способів доведення зазначеного твердження та наведено вибрані з них.

Ключові слова: *трикутник, ортоцентр, центр описаного кола, відношення відстаней, способи доведення, шкільний курс геометрії, навчання.*

> «Желание решить задачу многими способами является далеко не праздным. Уверен, что те, кто искренне заинтересованы в изучении математики и ее преподавании, убедились не только в эффективности, но и в эстетической привлекательности поисков второго способа решения» [6]
>
> И.А. Кушнир

Вступ

Представлена стаття присвячена дидактичним і методичним аспектам впровадження до шкільного курсу геометрії відомого твердження (з розділу «відстані між чудовими точками трикутника») класичного курсу елементарної геометрії, а саме: «відстань від вершин трикутника до ортоцентра вдвічі більша за відстань від центра описаного кола до протилежної сторони» (напр., [3]).

Автори щиро переконані у тому, що зазначене твердження повинно зайняти в шкільному курсі геометрії таке саме місце, як властивість точки перетину медіан та властивість точки перетину бісектрис трикутника.

Серед чинних підручників з геометрії слід виділити [9] і [10], в яких це твердження авторами запропоновано в якості леми. І хоча можливі способи доведення та яскраві застосування цього твердження досить повно висвітлено в літературі (в першу чергу маємо на увазі [5] і [6]), проте дидактичні та методичні аспекти, пов'язані із впровадженням цього матеріалу в шкільний курс геометрії, потребують уваги та відповідних напрацювань.

Більше того, з досвіду спілкування зі студентами та вчителями математики (і не лише молодими), із прикрістю слід констатувати, що сам зміст цього твердження є маловідомим сучасній академічній спільноті.

З урахуванням зазначеного, **метою** статті є: з одного боку – популяризація зазначеної формули-твердження та вибраних способів його доведення; з іншого боку – пропагування ідеї змістовно-виваженого добору дидактичного матеріалу з метою ознайомлення учнів з твердженнями, які мають геометричну цінність та широкі застосування.

1. Основні поняття та попередні відомості

Наслідуючи І.А. Кушніра ([5], [6]), має місце «одна з головних» або ж «важлива формула геометрії трикутника»

$$OM_1 = \frac{1}{2} AH \,, \tag{1}$$

де: O – центр описаного навколо $\triangle ABC$ кола; M_1 – середина сторони BC; H – ортоцентр $\triangle ABC$.

В підручниках [9, С. 107] і [10, С. 129] це твердження подано у вигляді леми наступного змісту

Лема. *Якщо H – ортоцентр трикутника ABC, OM_1 – перпендикуляр, опущений із центра O описаного кола на сторону BC, то $AH = 2OM_1$.*

Слід також зауважити, що авторами підручників [9] і [10] властивість точки перетину медіан трикутника запропоновано доводити за допомогою зазначеної леми, так само як і автором книги [5].

Також маємо своїм обов'язком відзначити, що зміст зазначеної формули-твердження подано:

в [3, С. 54] у вигляді наслідку з властивостей кола Ейлера

«Следствие. *Расстояние от вершин треугольника до ортоцентра равно удвоенному расстоянию от центра описанного круга до противоположной стороны»,*

а в [14, С. 42] – у вигляді задачі

«Задача 630. *Докажите, что расстояние от вершины треугольника до точки пересечения высот вдвое больше, чем расстояние от центра описанного круга до противоположной стороны».*

Автори представленої статті схильні формулювати зазначену формулу-твердження (у без символьному варіанті) в наступній редакції

Лема*. *Відстань від вершини (непрямого) кута трикутника до (ортоцентра) точки перетину його висот вдвічі більша за відстань від центра описаного кола до сторони, протилежної зазначеному куту.*

DOI: https://doi.org/...

Відтепер і в подальшому будемо використовувати наступні позначення для елементів трикутника:
M – центроїд – точка перетину медіан (центр тяжіння) $\triangle ABC$; H – ортоцентр – точка перетину прямих, що містять висоти $\triangle ABC$; O – центр кола, описаного навколо $\triangle ABC$; A_0, B_0, C_0 – середини сторін BC, CA та AB (відповідно) $\triangle ABC$; A_1, B_1, C_1 – основи висот $\triangle ABC$; α, β, γ – (градусні) міри кутів $\angle A$, $\angle B$ і $\angle C$ $\triangle ABC$; a, b, c – довжини сторін BC, CA та AB (відповідно) $\triangle ABC$; R – довжина радіуса кола, описаного навколо $\triangle ABC$.

Детально із суміжними питаннями щодо відстаней від вершини трикутника до чудових його точок та відстаней між іншими важливими точками трикутника можна ознайомитися, наприклад, в [4], [1], [3].

2. Основна частина

Знайомство із зазначеним твердженням можна розпочати у 8 класі, пропонуючи учням в якості усної вправи, переконатися в його справедливості для правильного трикутника.

Потім доцільно перейти до розгляду прямокутного трикутника (рис. 1) та запропонувати учням обґрунтувати справедливість наступних рівностей

$$AH = AC = 2C_0A_0 = 2OA_0;\ BH = BC = 2C_0B_0 = 2OB_0;\ CH = 2OC_0.$$

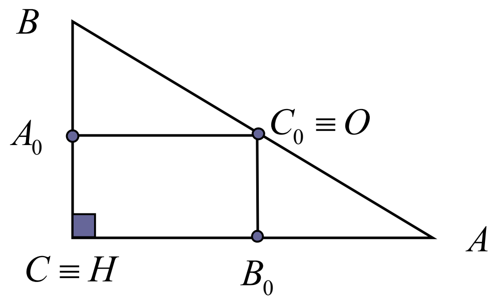

Рис. 1.: до випадку прямокутного трикутника.

Виокремлення випадку прямокутного трикутника є більш ніж доцільним, оскільки в подальшому, в залежності від обраного способу доведення (за умов дотримання належного рівня математичної строгості) такий підхід позбавляє від необхідності розгляду цього випадку. Більше того, вкрай важливо запропонувати учням довести

Твердження 1. *Ортоцентр трикутника співпадає з його вершиною тоді і лише тоді, коли центр описаного кола співпадає із серединою протилежної сторони.*

Це твердження доцільно пропонувати (як наслідок) після усвідомленого опанування учнями наступних тверджень:

«*ортоцентр трикутника співпадає з його вершиною тоді і лише тоді, коли трикутник є прямокутним з гіпотенузою напроти цієї вершини*»;

«центр описаного кола трикутника співпадає із серединою його сторони тоді і лише тоді, коли трикутник є прямокутним з прямим кутом напроти цієї сторони».

2.1. Способи доведення

У восьмому класі доцільно пропонувати наступні способи доведення

1) За допомогою рівності трикутників та властивостей середньої лінії трикутника

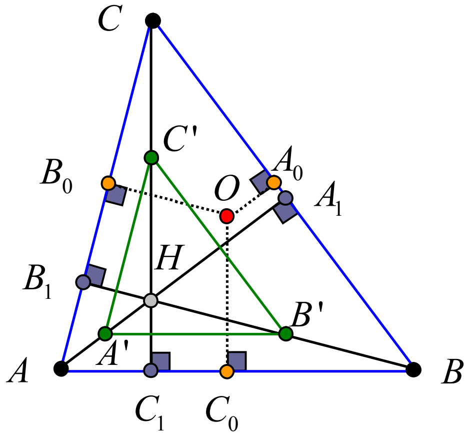

Рис. 2.: $a)$

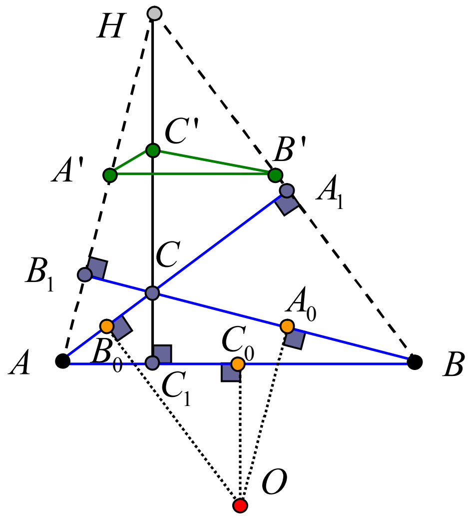

Рис. 2.: $b)$

1) Нехай A', B', C' – середини відрізків AH, BH і CH відповідно. Оскільки $A'C'$ – середня лінія $\triangle AHC$, то $A'C' \parallel AC$, $2A'C' = AC$; аналогічно, оскільки A_0C_0 – середня лінія $\triangle ABC$, то $A_0C_0 \parallel AC$, $2A_0C_0 = AC$.

Розглянемо $\triangle A'HC'$ та $\triangle A_0OC_0$.

Оскільки $CC_1 \perp AB$ і $OC_0 \perp AB$, то (за ознакою паралельних прямих) $HC' \parallel OC_0$. Аналогічно, оскільки $AA_1 \perp BC$ і $OA_0 \perp BC$, то $HA' \parallel OA_0$. Таким чином, в $\triangle A'HC'$ та $\triangle A_0OC_0$ прямі, що містять відповідні сторони, є паралельними. А тому відповідні кути є рівними. Крім того, оскільки $A'C' = A_0C_0 = \dfrac{1}{2}AC$, то $\triangle A'HC' = \triangle A_0OC_0$ (за стороною та прилеглими кутами). Звідки $OC_0 = HC'$, $OA_0 = HA'$. А з того що C' і A' є серединами відрізків CH і AH, остаточно одержуємо, що $2OC_0 = CH$, $2OA_0 = AH$.

2) В аналогічний спосіб можна показати, що $\triangle A'HB' = \triangle A_0OB_0$. Звідки й випливатиме рівність $OB_0 = HB'$. А з урахуванням умови $HB' = B'B$ – (третя) доводжувана рівність $2OB_0 = BH$.

Зауваження 1. *Використовуючи допоміжні точки A', B' і C' (середини відрізків AH, BH і CH), наведені міркування (з очевидними змінами) можна перетворити на доведення подібності (за двома кутами та з коефіцієнтом $k = 2$) наступних пар трикутників: $\triangle A_0OC_0$ і $\triangle AHC$ та $\triangle A_0OB_0$ і $\triangle AHB$. З подібностей пар трикутників й випливатимуть три доводжувані рівності.*

Таким чином, вже у 8-му класі, є принципова можливість знайомити учнів зі змістом Леми, незалежно від того, за яким підручником здійснюється навчання геометрії ([5] і [6] – «другий спосіб»).

DOI: https://doi.org/...

ISSN 24132667 (Print), ISSN 24153079 (Online)

Ще один досить цікавий спосіб («шостий спосіб» в [5] і [6]) ґрунтується на розгляді пар чотирикутників $OC_0A'B_0$ та $OC_0B'A_0$ або $OB_0A'C_0$ та $OB_0C'A_0$, або ж $OA_0B'C_0$ та $OA_0C'B_0$ (в термінах попереднього способу), які є паралелограмами – рис. 2 $a)$, $b)$.

2) За допомогою описаного кола та паралелограма

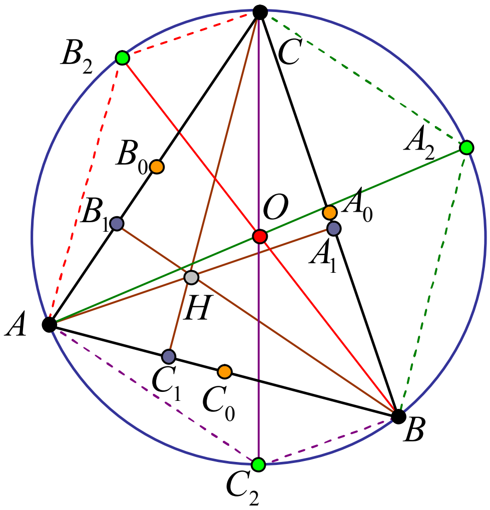

Рис. 3.: $a)$

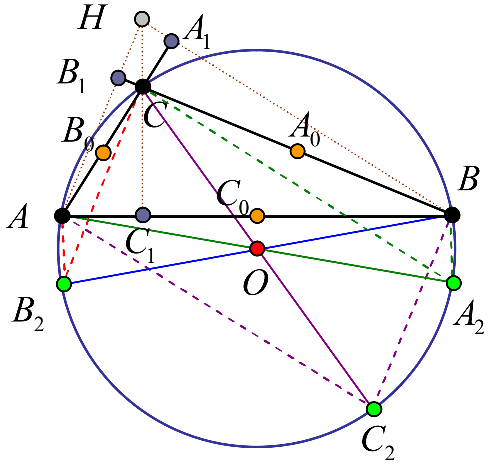

Рис. 3.: $b)$

1) Нехай AA_2 – діаметр кола, описаного навколо $\triangle ABC$ – рис. 3 $a)$, $b)$. Тоді $\angle ACA_2 = \angle ABA_2 = 90^0$ як кути, що спираються на діаметр AA_2.

2) За ознакою паралельних прямих $A_2C \parallel BH$ (бо $A_2C \perp AC$ і $BH \perp AC$) та $A_2B \parallel CH$ (бо $A_2B \perp AB$ і $CH \perp AB$). Звідки за визначенням чотирикутник HCA_2B є паралелограмом і тому

$$A_2C = BH\,,\ A_2B = CH\,. \tag{1}$$

3) З іншого боку, B_0O і C_0O є середніми лініями $\triangle ACA_2$ та $\triangle ABA_2$ відповідно. Звідки (за властивістю середньої лінії трикутника) маємо, що

$$2OB_0 = A_2C\,,\ 2OC_0 = A_2B\,. \tag{2}$$

Зі співвідношень (1) і (2), одержуємо рівності

$$2OB_0 = BH \text{ та } 2OC_0 = CH\,. \tag{3}$$

4) Повторюючи кроки 1)-3), наприклад, для діаметра BB_2, одержимо відповідні рівності

$$2OA_0 = AH \text{ та } 2OC_0 = CH\,. \tag{4}$$

4*) Повторюючи кроки 1)-3), наприклад, для діаметра CC_2, одержимо відповідні рівності

$$2OA_0 = AH \text{ та } 2OB_0 = BH\,. \tag{4*}$$

З (3) і (4) (або (3) і (4*)) маємо справедливість доводжуваних рівностей.

Ще з двома способами доведення за допомогою описаного кола можна ознайомитися в [5] і [6] («п’ятий» і «дев’ятий» способи).

3) За допомогою подібності – див. зауваження 1 вище.

4) За допомогою «подвоєного трикутника» та подібності.

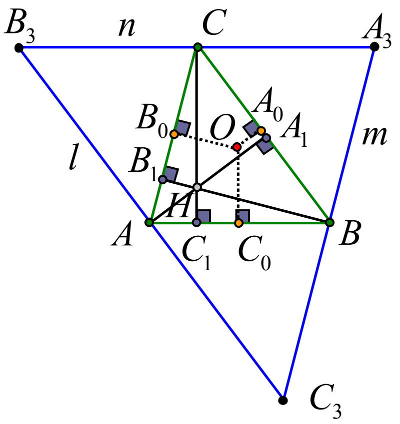

Рис. 4.: $a)$

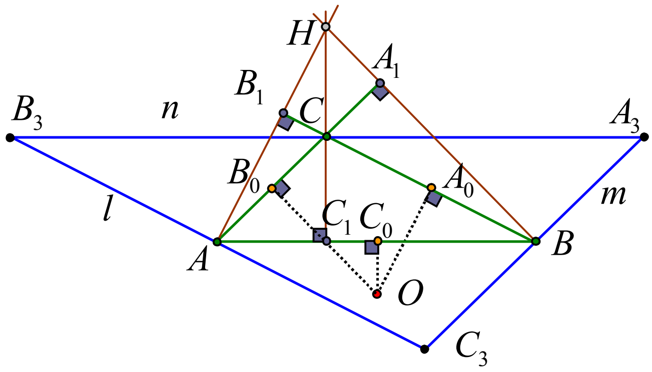

Рис. 4.: $b)$

1) Нехай маємо довільний $\triangle ABC$. Проведемо прямі l, m, n, що проходять через вершини A, B і C паралельно до протилежних сторін BC, CA та AB відповідно.

Оскільки прямі, що містять сторони трикутника не є паралельними, то і зазначені прямі l, m, n не є паралельними. А тому позначимо їх точки перетину як $C_3 = l \cap m$, $A_3 = m \cap n$ та $B_3 = n \cap l$.

2) $\triangle ABC$ є подібним до $\triangle A_3B_3C_3$ (за двома кутами). Більше того, оскільки чотирикутники CB_1AB і CAC_1B є паралелограмами (за визначенням), то $B_3A = CB = AC_3$ (як протилежні сторони паралелограмів). Звідки A – середина сторони B_3C_3 та $B_3C_3 = BC$. Аналогічно: B – середина сторони C_3A_3 та $C_3A_3 = CA$; C – середина сторони A_3B_3 та $A_3B_3 = AB$.

Таким чином $\triangle A_3B_3C_3$ є подібним до $\triangle ABC$ з коефіцієнтом $k = 2$.

3) Очевидно, що:

прямі AA_1, BB_1 і CC_1 (які містять висоти $\triangle ABC$ та перетинаються в точці H) є серединними перпендикулярами до відповідних сторін $\triangle A_3B_3C_3$;

а прямі A_0O, B_0O і C_0O – серединними перпендикулярами до відповідних сторін $\triangle ABC$ та перетинаються в точці O.

Таким чином відрізки AH і A_0O, BH і B_0O, CH і C_0O є відповідними відрізками подібних трикутників $\triangle A_3B_3C_3$ та $\triangle ABC$. Звідки й випливає, що справджуються рівності $AH = 2OA_0$, $BH = 2OB_0$, $CH = 2OC_0$.

Маємо своїм приємним обов'язком відзначити, що додаткова побудова та ідея, які викладено в пунктах 1)-3), належать відомому математику Карлу Гаусу, який першим у зазначений спосіб запропонував доведення твердження про перетин прямих, які містять висоти трикутника. (напр., [8, С. 73])

Зауваження 2. *Не важко переконатися у тому, що зазначений вище $\triangle A_3B_3C_3$ є образом $\triangle ABC$ при гомотетії H_M^{-2}. І тоді справедливість доводжуваної формули-твердження можна показати так, як це зроблено в* [5, С. 95-96] і [6, С. 141] *(«Третій спосіб»).*

DOI: https://doi.org/...

Тому у 9-му класі є принципова можливість знайомити учнів зі змістом Леми, незалежно від того, за яким підручником здійснюється навчання геометрії.

У девятому класі доцільно пропонувати наступні способи доведення

5) За допомогою теореми синусів

пропонуємо самостійно ознайомитися в [5] або [6] («сьомий спосіб»).

Зауваження 3. *Найбільш рясними є прийоми доведення, пов'язані з обчисленням в загальному вигляді окремо величин AH та OA_0. Більшість з них (з точністю до перепозначень) мають своїм результатом наступні співвідношення:* $AH = 2OA_0 = 2R \cdot |\cos\alpha|$; $AH = 2OA_0 = a \cdot |\mathrm{ctg}\,\alpha|$;

$AH = 2OA_0 = \sqrt{4R^2 - a^2}$; $AH = 2OA_0 = 2R + r - r_a$.

При зазначеному підході слід пам'ятати, що не кожен обраний прийом можна «за аналогією перенести» від пари відповідних відрізків, один з яких містить вершину гострого кута, на пару відповідних відрізків, один з яких містить вершину тупого кута. І тому, якщо для тупокутного трикутника встановлено відношення лише для однієї пари відповідних відрізків, то такий спосіб доведення не можна вважати цілком коректним в сенсі повноти.

6) За допомогою теореми синусів, двох описаних кіл та паралельного перенесення

1) Оскільки $\angle BHC = 180^0 - \angle A$, то за теоремою синусів радіуси кіл ω і ω_1, описаних навколо (відповідно) $\triangle BAC$ та $\triangle BHC$, є рівними.

2) Оскільки BC є спільною хордою кіл ω і ω_1 (з центрами O і O_1 відповідно), то лінія центрів OO_1 є перпендикулярною до хорди BC та ділить її навпіл у точці A_0. Звідки $OA_0 = A_0O_1$.

3) З іншого боку, коло ω_1 є образом кола ω при паралельному перенесені на вектор $\overrightarrow{OO_1} = 2 \cdot \overrightarrow{OA_0}$.

За ознакою паралельних прямих $AH \parallel OA_0$ (бо $AH \perp BC$ і $OA_0 \perp BC$), тому $AH \parallel OO_1$. Більше того, для вершини непрямого $\angle A$ вектори $\overrightarrow{AH}$ та $\overrightarrow{OA_0}$ є співнапрямленими. (*Дійсно: для вершин гострих кутів прямокутного трикутника та вершин гострокутного трикутника (O і H належать внутрішній частині трикутника) це очевидно; для вершин гострих та тупого кутів тупокутного трикутника в цьому можна переконатися шляхом безпосередньої перевірки*).

Таким чином, оскільки $\overrightarrow{AH} \uparrow\uparrow \overrightarrow{OO_1}$, $A \in \omega$, $H \in \omega_1$, то точка H (кола ω_1) є образом точки A (кола ω) при паралельному перенесенні на вектор $\overrightarrow{OO_1}$. Тому справджується векторна рівність $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{OO_1} = 2\overrightarrow{OA_0}$.

Звідки й випливає справедливість доводжуваної рівності $AH = 2OA_0$.

Схожий підхід (2-ий спосіб до задачі №53528) наведено в [15].

7) За допомогою осьової симетрії, описаного кола та паралелограма пропонуємо самостійно ознайомитися в [5] або [6] («восьмий спосіб»).

8) За допомогою гомотетії - 1 – див. зауваження 2 вище.

9) За допомогою гомотетії - 2.

1) Нехай $\triangle ABC$ – довільний трикутник. Розглянемо гомотетію $H_M^{-\frac{1}{2}}$ з центром у точці M (перетину медіан $\triangle ABC$) та коефіцієнтом $k=-0,5$.

Оскільки (за властивістю точки перетину медіан трикутника) справджуються рівності $\dfrac{AM}{MA_0}=\dfrac{BM}{MB_0}=\dfrac{CM}{MC_0}=\dfrac{2}{1}$ (а точка M є внутрішньою точкою кожного з відрізків AA_0 BB_0 CC_0), то справджуються й векторні рівності $\dfrac{\overrightarrow{MA_0}}{\overrightarrow{MA}}=\dfrac{\overrightarrow{MB_0}}{\overrightarrow{MB}}=\dfrac{\overrightarrow{MC_0}}{\overrightarrow{MC}}=-\dfrac{1}{2}$. Тому (за визначенням гомотетії) точки A_0, B_0 і C_0 є образами точок A, B і C (відповідно) в цій гомотетії.

2) Оскільки гомотетія (площини) є подібністю (площини), то образом прямої є пряма. Очевидно, що образом прямих AB, BC і CA є прямі A_0B_0, B_0C_0 та C_0A_0 відповідно. За властивістю середньої лінії трикутника $AB \parallel A_0B_0$, $BC \parallel B_0C_0$ та $CA \parallel C_0A_0$.

Більше того, оскільки при гомотетії зберігаються кути між прямими, то образами прямих AA_1, BB_1 і CC_1 в цій гомотетії є прямі l_0, m_0, n_0, що проходять через точки A_0, B_0 і C_0 перпендикулярно до прямих B_0C_0, C_0A_0 і A_0B_0, а тому і до прямих BC, CA та AB відповідно.

Крім того, образом ортоцентру H (як точки перетину прямих AA_1, BB_1 і CC_1) є точка перетину (їх образів –) прямих l_0, m_0 і n_0, тобто точка O – центр кола, описаного навколо $\triangle ABC$. Звідки $H_M^{-0,5}\left(H\right)=O$.

3) Таким чином при гомотетії $H_M^{-0,5}$ образами відрізків AH, BH і CH є відрізки A_0O, B_0O і C_0O відповідно. Оскільки $H_M^{-0,5}$ є подібністю з коефіцієнтом $k'=|k|=\frac{1}{2}$, то мають місце рівності $AH=2A_0O$, $BH=2B_0O$, $CH=2C_0O$. Звідки й випливає справедливість доводжуваного твердження.

Зауваження 4. *Добре відомо, що одним з основних результатів застосування до трикутника зазначеної гомотетії є співвідношення*

$$H_M^{-\frac{1}{2}}\left(H\right)=O \Leftrightarrow \overrightarrow{MO}=-\tfrac{1}{2}\overrightarrow{MH} \Leftrightarrow \overrightarrow{HM}=2\overrightarrow{MO},$$

безпосереднім наслідком якого є твердження, що носить назву «Пряма Ейлера» (напр. [1, С. 40], [2, С. 28] або [7, С. 194])*, а саме*

Теорема (Ейлера). В довільному (нерівносторонньому) трикутнику ортоцентр, центр тяжіння (центроїд) та центр описаного кола належать одній прямій, причому точка M розташована між точками O і H та справджується рівність $HM:MO=2:1$.

DOI: https://doi.org/...

10) Векторний спосіб.

1) Нехай $\triangle ABC$ – довільний трикутник. Доведемо спочатку векторну рівність, яка носить назву «формула Гамільтона» (див., напр., [7, С. 178] або [13, С. 51])

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.$$

Оскільки C_0 – середина AB, то за правилом паралелограма $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OC_0} = \overrightarrow{OC_2}$. Крім того, оскільки $\left|\overrightarrow{OA}\right| = \left|\overrightarrow{OB}\right|$ (як радіуси описаного кола), то медіана OC_0 є висотою $\triangle AOB$. Звідки $OC_2 \perp AB$. І тому $OC_2 \parallel CC_1$.

Нехай далі $\overrightarrow{OC_2} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OQ}$, тоді $\overrightarrow{OC_2} = -\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{CQ}$. Звідки $OC_2 \parallel CQ$ і тому $CQ \perp AB$. Звідки й випливає, що точка Q належить прямій, яка містить висоту CC_1.

Більше того, з припущення про те, що

$$\overrightarrow{OQ^*} = \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right) + \overrightarrow{OC} = \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}\right) + \overrightarrow{OB} = \left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right) + \overrightarrow{OA},$$

матимемо, що точка Q^* належить кожній з прямих, які містять висоти $\triangle ABC$. І тому така точка Q^* співпадатиме з ортоцентром H $\triangle ABC$.

2) Оскільки (за першою частиною) справджується векторна рівність

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right) + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OC_0} + \overrightarrow{OC},$$

то $2\overrightarrow{OC_0} = -\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{CH}$. Звідки й випливає, що $\left|\overrightarrow{CH}\right| = 2\left|\overrightarrow{OC_0}\right|$. Звідки й випливає справедливість доводжуваного твердження.

Слід відзначити, що зміст 1)-ої частини (формули Гамільтона) наведеного розв'язання подано в [11, С. 140] та [12, С. 153] у вигляді теореми та ключової задачі відповідно. Тому є принципова можливість знайомити учнів з доводжуваною формулою-твердженням у вигляді безпосередніх наслідків із зазначених теореми та ключової задачі.

Зауваження 5. *Відсутність рисунків до 9-го та 10-го способів не є випадковим а саме цілеспрямованим аспектом викладу, бо рисунки до зазначених способів носять суто ілюстративний характер, а їх відсутність аж ніяк не применшує математичної строгості наведених обґрунтувань.*

Більше того, автори щиро переконані в тому, що з певного моменту фахової підготовки студентів (майбутніх вчителів математики) слід приділяти увагу тим вправам і типам геометричних задач, методам та прийомам в геометрії, які не потребують рисунків.

На превеликий жаль, слід також констатувати, що для багатьох студентів та молодих вчителів рисунок до задачі є відправним пунктом та цілковито визначальним для побудови ланцюжка обґрунтувань.

Крім того, добре відомо, що поширеними помилками в геометрії є помилки, пов'язані, наприклад з видом трикутника, який аж ніяк не задовольняє умову задачі, або ж навпаки – є одним з можливих випадків реалізації.

2.2. Наслідки та прикінцеві зауваження

З урахуванням Твердження 1, на думку авторів, зміст Леми*, більш ніж доцільно формулювати в термінах векторної рівності, а саме

Лема.** *Для довільного $\triangle ABC$ справджуються векторна рівність*

$$2\overrightarrow{A_0O} = -\overrightarrow{AH} \Leftrightarrow \overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OA_0},$$

де: O – центр кола, описаного навколо $\triangle ABC$; A_0 – середина сторони BC; H – ортоцентр $\triangle ABC$.

Тобто, для повноцінного опанування зазначеного відношення, важливо усвідомлювати, що для довільного трикутника ABC:

– або кінці (колінеарних протилежно направлених) векторів $\overrightarrow{AH}$ та $\overrightarrow{A_0O}$ одночасно належать внутрішній частині трикутника; що можливо тоді і лише тоді, коли трикутник є гострокутним;

– або кінці (колінеарних протилежно направлених) векторів $\overrightarrow{AH}$ та $\overrightarrow{A_0O}$ одночасно належать зовнішній частині трикутника; що можливо тоді і лише тоді, коли трикутник є тупокутним;

– або ж вектори $\overrightarrow{AH}$ та $\overrightarrow{A_0O}$ одночасно є нульовими векторами; що можливо тоді і лише тоді, коли трикутник є прямокутним.

На практиці доцільно використовувати наступні формули для довжин відрізків, про які йдеться в твердженні (напр., [4]):

$$\begin{cases} AH = 2OA_0 = \sqrt{4R^2 - a^2} = 2R \cdot |\cos\alpha| = a \cdot |\mathrm{ctg}\,\alpha| = 2R + r - r_a \\ BH = 2OB_0 = \sqrt{4R^2 - b^2} = 2R \cdot |\cos\beta| = b \cdot |\mathrm{ctg}\,\beta| = 2R + r - r_b \\ CH = 2OC_0 = \sqrt{4R^2 - c^2} = 2R \cdot |\cos\gamma| = c \cdot |\mathrm{ctg}\,\gamma| = 2R + r - r_c \end{cases}, \qquad (*)$$

де: r – радіус вписаного кола трикутника ABC; r_a, r_b і r_c – радіуси зовні вписаних кіл, які дотикаються до сторін BC, AC та AB відповідно та продовжень двох інших сторін $\triangle ABC$.

Пропонуємо читачам для самостійного опрацювання наступні задачі

Вправа 1. *Чи існує трикутник, ортоцентр та центр описаного кола якого належать середній лінії трикутника. Відповідь обґрунтуйте.*

Задача 1 ([7, С. 159]). *AM_1 – медіана рівнобедреного $\triangle ABC$ ($AB = AC$). Знайти $\angle A$, якщо $OM_1 = OH$ (O – центр описаного кола, H – ортоцентр).*

Задача 2 ([7, С. 214]). *У коло з центром O вписано чотирикутник зі взаємно перпендикулярними діагоналями. Довести, що відстань від точки O до сторони чотирикутника дорівнює половині довжини протилежної сторони.*

Задача 3 ([16, задача 3 для 11 класу]). *В гострокутному $\triangle ABC$ точки H і O є точками перетину висот і центром описаного кола відповідно. Пряма HO перетнула сторони AB і AC в точках X та Y відповідно, причому точка H належить відрізку OX. Виявилося, що $XH = HO = OY$. Знайдіть градусну міру $\angle BAC$. (Олексій Масалітін)*

Більш детально з можливими застосуваннями зазначеної формули-твердження можна ознайомитися в [5, С. 98-102] та [4, С. 2-3].

Висновки

Власний досвід та наведені результати дозволяють стверджувати, що застосування наведеної формули-твердження є досить дієвим підходом до розв'язування широкого кола геометричних задач.

На думку авторів, запропонований підхід до впровадження важливих геометричних тверджень під час навчання геометрії є саме тим видом особистого розвитку та фахової діяльності, які повинні бути включені не лише в програму підготовки майбутніх вчителів математики, а й у програму курсів підвищення кваліфікації вчителів математики. Вважаємо, що це дасть можливість опановувати справжню математичну культуру та більш помірковано підходити до дидактичного забезпечення тем шкільного курсу геометрії.

Також переконані, що наведений матеріал доцільно використовувати в освітньому процесі як основу для змістового модуля вибіркових освітніх компонентів (таких як «вибрані питання методики навчання математики) освітніх програм підготовки здобувачів вищої освіти за спеціальністю 014 Середня освіта (Математика).

Література

1. Бевз Г.П. Геометрія трикутника : Навч.-метод. посіб. для загальноосвіт. навч. закл. К. : Генеза, 2005. 120 с.

2. Гордин Р.К. Это должен знать каждый матшкольник. 2-е изд., испр. М.: МЦНМО, 2003. 56 с

3. Зетель С.И. Новая геометрия треугольника. 2-е изд. М.: Учпедгиз, 1962. 153 с.

4. Карлюченко О., Філіпповський Г. Про відстані від вершини трикутника до його чудових точок. [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: https://usnd.to/Celo

5. Кушнір І.А. Методи розв'язання задач з геометрії. Книга для вчителя. К.: Абрис, 1994. 464 с.

6. Кушнир И. Альтернативные способы решения задач (Геометрия). К.: Факт, 2006. 368 с.

7. Кушнір І. Повернення втраченої геометрії. Серія : Математичні обрії України. К. : Факт, 2000. 280 с.

8. Кушнир И.А., Финкельштейн Л.П. Геометрия. Школа боевого искусства. Учебное пособие для учеников 7-9 классов. К. : Факт, 1999. 232 с.

9. Мерзляк А.Г. Геометрія : підручник для 8 кл. закладів загальної середньої освіти / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, М.С. Якір. 2-ге видання, перероблене. Х. : Гімназія, 2021. 208 с.

10. Мерзляк А.Г. Геометрія : підручник для 8 кл. з поглибленим вивченням математики закладів загальної серед. освіти / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, М.С. Якір. 2-ге видання, перероблене. Х. : Гімназія, 2021. 224 с.
11. Мерзляк А.Г. Геометрія : підручник для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, М.С. Якір. Х. : Гімназія, 2017. 240 с.
12. Мерзляк А.Г. Геометрія для загальноосвітніх навчальних закладів з поглибленим вивченням математики : підручник для 9 кл. загальноосвітніх навчальних закладів / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, М.С. Якір. Х. : Гімназія, 2017. 304 с.
13. Федак І.В. Готуємося до олімпіади з математики Ч.ІІ. Геометрія та нестандартні конструкції. [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: https://usnd.to/C8CU
14. Шарыгин И.Ф., Гордин Р.К. Сборник задач по геометрии. 5000 задач с ответами. М. : ООО «Издательство Астрель»: ООО «Издательство АСТ», 2001. 400 с.
15. Система задач по геометрии Р.К. Гордина. [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: https://usnd.to/Celf
16. Умови та вказівки до розв'язань задач ІІІ етапу Всеукраїнської олімпіади з математики. LXXVII Київська міська олімпіада юних математиків. (1 тур, 2022 р.) [Електронний ресурс] – Режим доступу: https://matholymp.com.ua/wp-content/uploads/2022/01/tekst-2021-22-tur-1-5.pdf

Diana S. Bondar, Svitlana Iv. Vorobiova, Oleksandr A. Kadubovs'kyi
Donbas State Pedagogical University, Sloviansk, Ukraine;
Donetsk Regional Institute of Postgraduate Pedagogical Education, Ukraine.

About one important relationship in triangle geometry and related issues

The article is devoted to the introduction of an important relationship between the lengths of the segments connecting the vertex of the triangle and the orthocenter and the center of the circumcircle and the middle of the opposite side in the school course of geometry. Implementation is proposed by improving the didactic support of certain topics of the school course of geometry for students of 8th and 9th grades of general secondary education. In addition, the article reviews the existing methods and selects some of them to bring this statement.

Keywords: *triangle, orthocenter, center of the circumscribed circle, distance correlation, methods of proof, school course of geometry, training.*