УДК 514.112.3

Гриценко Т.Ю., Кадубовський О.А.

[1] *здобувач магістерського РВО фізико-математичного факультету, ДВНЗ «ДДПУ»*
e-mail: taras.gritsenko01@gmail.com, ORCID 0000-0002-3199-2730
[2] *кандидат фіз.-мат. н., доцент кафедри математики та інформатики, ДВНЗ «ДДПУ»*
e-mail: kadubovs@ukr.net, ORCID 0000-0003-2045-810X

ПРО МЕТРИЧНІ СПІВВІДНОШЕННЯ В ПРЯМОКУТНОМУ ТРИКУТНИКУ ТА СУМІЖНІ ПИТАННЯ

Стаття присвячена систематизації та узагальненню відомостей про метричні співвідношення у прямокутному трикутнику. Для фіксованого переліку його елементів детально розглянуто три найбільш поширені типи метричних задач на знаходження: 1) елементів прямокутного трикутника за двома його катетами; 2) невідомого катета за відомим катетом та одним з інших його елементів; 3) катетів прямокутного трикутника за двома його елементами. Приділяється увага особливостям розв'язування задач третього типу в загальному вигляді (без числових значень величин). Розв'язки (в загальному вигляді) 72 із 96 з принципово різних зазначених вище задач подано у вигляді відповідних метричних співвідношень, 60 з яких можуть бути використані для формулювання відповідних маловідомих ознак рівності прямокутних трикутників та одержання наслідків у вигляді нерівностей для його елементів. Також наведено 38 властивостей-ознак прямокутного трикутника у вигляді відповідних метричних співвідношень. Запропонований авторами підхід до систематизації та подання метричних співвідношень (в узагальненому вигляді та вигляді таблиць) дозволяє ефективно розв'язувати значно ширше коло метричних задач на знаходження невідомого елементу прямокутного трикутника за двома іншими його елементами (із зазначеного переліку) та генерувати відповідні метричні співвідношення як наслідки з вже наведених.

Ключові слова: *прямокутний трикутник, метричні співвідношення, ознаки рівності, властивості-ознаки, шкільний курс геометрії.*

Вступ

«Розв'язування прямокутних трикутників» є наскрізною змістовною лінією шкільного курсу геометрії 8-9 класів. А навички застосувань метричних співвідношень в трикутнику, зокрема прямокутному, є одними з програмних результатів навчання. Задачі на розв'язування трикутників, зокрема прямокутних, стали традиційними й під час проведення ЗНО та НМТ з математики. А з урахуванням очевидного прикладного аспекту в багатьох галузях людської діяльності, важко переоцінити важливість та вміння розв'язування задач на знаходження невідомого елемента прямокутного трикутника за двома іншими його елементами.

З іншого боку – класифікація об'єктів, типізація задач, виокремлення ключових/опорних із сукупності принципово різних задач та систематизація і узагальнення відомостей з певної теми шкільного курсу математики є саме тим видом професійної творчості, який допомагає ґрунтовному формуванню відповідних математичних компетентностей та на нашу думку повинен бути включений не лише в програму підготовки майбутніх вчителів математики, а й у програму курсів підвищення кваліфікації. За переконанням авторів [12], зазначений вид діяльності дає можливість опанувати справжню математичну культуру та підготуватися для її передачі своїм учням.

З оглядом літератури, присвяченої задачам на прямокутний трикутник, детально можна ознайомитися в [12]. Слід окремо виділити роботу [13], в якій наведено низку маловідомих «властивостей-ознак» прямокутного трикутника та вказівки до їх доведення; запропоновано класифікацію ознак за методами і прийомами їх доведення та можливі підходи до пошуку нових ознак прямокутного трикутника. Пізніше, в роботі [14] співавтором було наведено детальне розв'язання обернених тверджень до двох добре відомих властивостей прямокутного трикутника, які, навіть досвідченими вчителями (за результатами спілкування та методичного практикуму на конкурсі вчителів), помилково сприймаються як ознаки прямокутного трикутника.

Використовуючи ідею, запропоновану В.Б. Фурсенком[1], в роботі [12] запропоновано наступний підхід до систематизації метричних задач на прямокутний трикутник шляхом виокремлення шести основних їх типів: I (тип) – на знаходження невідомих елементів прямокутного трикутника за двома (відомими) його катетами; II – на знаходження невідомого катета трикутника за відомим катетом та одним з його елементів; III – на знаходження невідомих катетів за двома (відомими) його елементами, з яких принаймні один є лінійним; IV – на обчислення відстаней між двома певними точками прямокутного трикутника; V – на визначення кутів між основними відрізками трикутника; VI – задачі мішаного характеру.

Якщо обмежитися розглядом найбільш основних з елементів прямокутного трикутника (*катетами, гострими кутами, медіанами, бісектрисами, висотою, опущеною з вершини прямого кута, радіусами вписаного, описаного та зовнівписаних кіл, площею, периметром та проекціями катетів на гіпотенузу*), то стає коректним питання щодо розгляду «повної системи задач» в сенсі та межах перших трьох із зазначених вище типів. За результатами аналізу, представленого у роботі [12], в діючих підручниках, найбільш поширених і змістовних посібниках та збірниках задач сукупно зустрічаються не більше 20 відсотків від загальної кількості зазначеної вище «повної системи задач». Останнє дає підстави констатувати, що автори навіть дуже поважних збірників, що видавались до сьогодення, стояли на невірному шляху, коли добирали та пропонували задачі.

Саме тому дана стаття й присвячена викладу формул, що є розв'язками задач I, II та III типів у загальному вигляді. Цю статтю слід вважати логічним продовженням роботи [12]. Є також сподівання, що представлений матеріал стане корисним для цільової аудиторії, принаймні як довідковий під гаслом «Енциклопедія метричних співвідношень у прямокутному трикутнику».

---

[1] Фурсенко В.Б. Лексикографическое изложение конструктивных задач геометрии треугольника. Математика в школе. 1937. № 5. С. 22-26.

1. Основні поняття та попередні відомості

Нижче наведемо основні метричні співвідношення для прямокутного трикутника за діючими підручниками [1–8]:

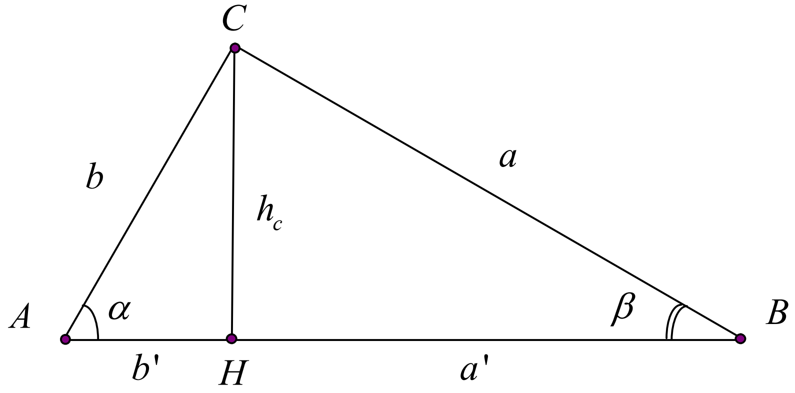

Рис. 1: до основних метричних співвідношень у прямокутному трикутнику

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \cos\beta, \ \cos\alpha = \frac{b}{c} = \sin\beta, \ \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a}{b} = \mathrm{ctg}\,\beta, \quad \mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{b}{a} = \mathrm{tg}\,\beta \tag{1}$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \qquad \mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \qquad \mathrm{tg}\,\alpha\cdot\mathrm{ctg}\,\alpha = 1 \tag{2}$$

$$a^2 = a'\cdot c, \qquad b^2 = b'\cdot c, \qquad \frac{a'}{b'} = \frac{a^2}{b^2} \tag{3}$$

$$h_c^2 = a'\cdot b' \tag{4}$$

$$a^2 + b^2 = c^2, \qquad c = \sqrt{a^2+b^2}, \qquad a = \sqrt{c^2-b^2}, \qquad b = \sqrt{c^2-a^2} \tag{5}$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1, \qquad \sin^2\beta + \cos^2\beta = 1 \tag{6}$$

$$r = \frac{a+b-c}{2} = \frac{ab}{a+b+c} = (p-a)\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = (p-b)\,\mathrm{tg}\frac{\beta}{2} = p-c \tag{7}$$

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{4b^2+a^2}, \ m_b = \frac{1}{2}\sqrt{4a^2+b^2}, \ m_c = \frac{c}{2} = R, \ m_a^2 + m_b^2 = 5m_c^2 \tag{8}$$

$$h_a = b, \qquad h_b = a, \qquad h_c = \frac{ab}{c} = \sqrt{a'b'}, \quad \frac{1}{h_a^2} + \frac{1}{h_b^2} = \frac{1}{h_c^2} \tag{9}$$

$$S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ch_c = \frac{a^2\,\mathrm{tg}\,\beta}{2} = \frac{b^2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{2} = \frac{ac\sin\beta}{2} = \frac{bc\sin\alpha}{2} \tag{10}$$

Відтепер і в подальшому будемо використовувати наступні позначення для елементів прямокутного трикутника ABC – (рис. 2):

a, b, c – довжини сторін BC, CA та AB (відповідно);

α, β, $\gamma = 90^0$ – (градусні) міри кутів $\angle A$, $\angle B$ і $\angle C$ (відповідно);

r – радіус кола, вписаного у $\triangle ABC$; I – центр цього кола; A_1, B_1, C_1 – точки дотику зазначеного кола зі сторонами BC, CA та AB (відповідно);

R – радіус кола, описаного навколо $\triangle ABC$;

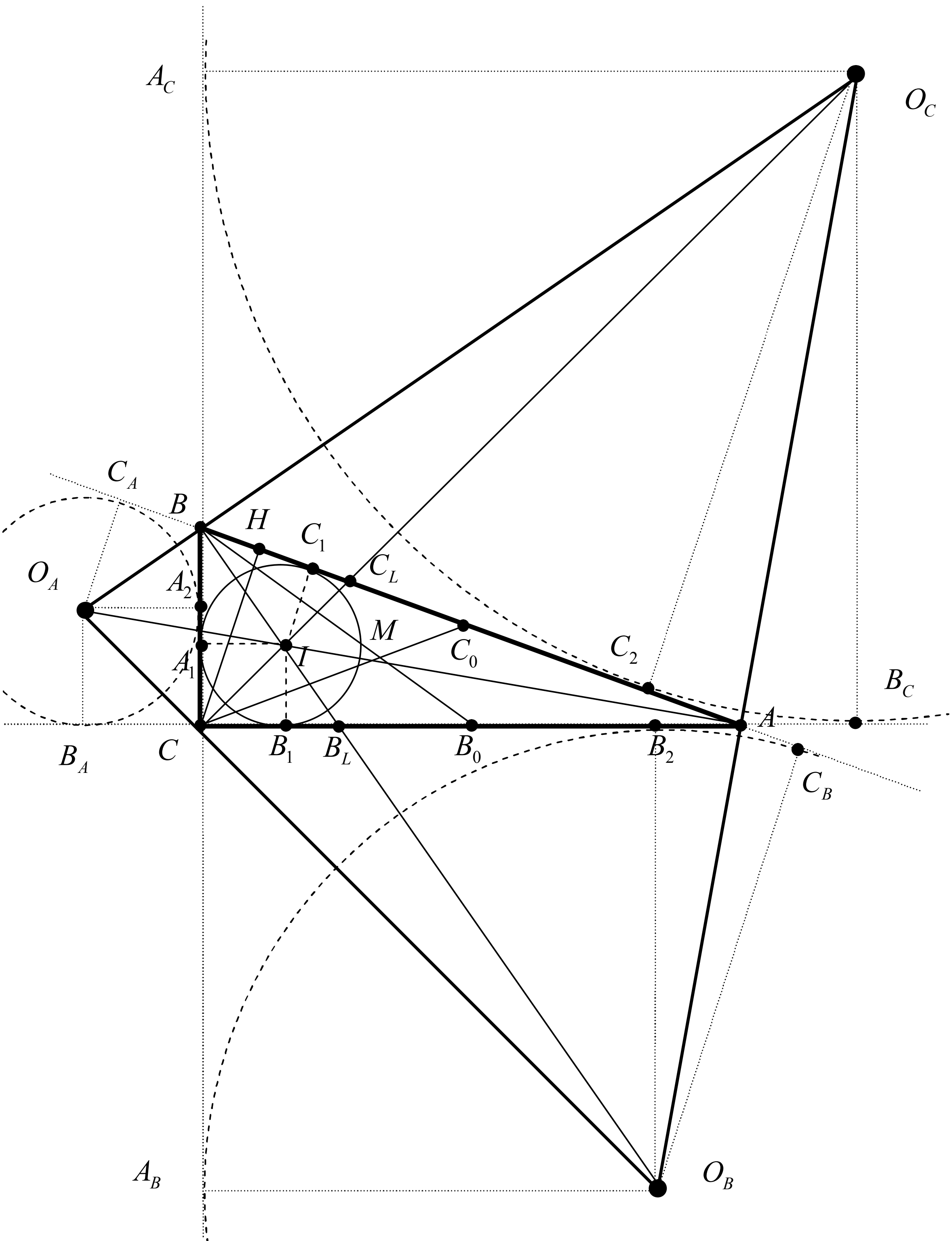

Рис. 2: до основних елементів прямокутного трикутника

r_a, r_b, r_c – радіуси зовнівписаних кіл $\triangle ABC$, які дотикаються сторін BC, CA та AB (відповідно); O_A, O_B, O_C – центри зазначених кіл; A_2, B_2, C_2 – точки дотику зазначених кіл зі сторонами BC, CA та AB (відповідно);

m_a, m_b, m_c – медіани $\triangle ABC$, які проведені до сторін BC, CA та AB (відповідно); A_0, B_0, C_0 – середини сторін BC, CA та AB (відповідно); M – точка перетину зазначених медіан (**центр тяжіння**);

l_a, l_b, l_c – бісектриси $\triangle ABC$, які проведені до сторін BC, CA та AB (відповідно); A_L, B_L, C_L – основи зазначених бісектрис; I – точка перетину бісектрис;

P, S – периметр та площа $\triangle ABC$ (відповідно);

a', b' – довжини проекцій катетів BC та CA (відповідно), $CH = h_c$ – висота $\triangle ABC$.

2. Основна частина

Розіб'ємо наступні елементи прямокутного трикутника на шість груп наступним чином:

1) $\{a\}$; 2) $\{b\}$;

3) $\{m_a; l_a; a'; r_a\}$; 4) $\{m_b; l_b; b'; r_b\}$;

5) $\{c(m_c, R); h_c; S; P(r_c); r; l_c\}$;

6) $\{\alpha = 90^\circ - \beta; \beta\}$.

Тоді загальна кількість метричних задач **I типу** (на знаходження елементів прямокутного трикутника за двома його катетами) становить **12**, а **II** типу (на знаходження невідомого катета трикутника за відомими катетом та одним з його елементів) – **15**. Загальна ж кількість задач **III типу** (на знаходження катетів за двома його елементами, з яких принаймні один є лінійним) насправді становить не 65 (як зазначено в [12]), а **69**. Тому, для фіксованого набору елементів прямокутного трикутника існує точно **96** суттєво різних задач, які й складають повну (в сенсі та межах трьох зазначених типів) систему метричних задач на прямокутний трикутник.

Подальший виклад буде присвячено розв’язкам задач саме II і III типів, сформульованих в загальному вигляді (без числових значень величин). Останнє зовсім не означає, що метою викладу є «кінцеві формули». Навпаки – вони повинні бути результатом відповідних досліджень та стати основою для відповідних наслідків і застосувань. Не можна не погодитися з авторами роботи [12], які наголошують на тому, що «при розв’язуванні задач з числовими даними часто втрачається «загальна картина» розв’язування задачі, взаємозв'язок з підзадачами. І як наслідок – пасивне засвоєння прийомів та методів розв'язування задач, озброєння учнів та студентів якими і є головною задачею при вивченні шкільного курсу математики».

Але спочатку наведемо нижче загальновідомі (в математичній та методичній літературі) формули для визначення/знаходження основних елементів $\{\alpha/\beta$; c (R, m_c); h_c, S; P (r_c); r; r_a, r_b; l_c; m_a, m_b; a', b'; l_a, $l_b\}$ прямокутного трикутника за відомими катетами a і b.

1. Формули для знаходження основних елементів $\{\alpha/\beta;\ c\ (R,\ m_c);\ h_c,\ S;\ P\ (r_c);\ r;\ r_a,\ r_b;\ l_c;\ m_a,\ m_b;\ a',\ b';\ l_a,\ l_b\}$ прямокутного трикутника за відомими катетами a і b:

$$\alpha:\quad \sin\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad \cos\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a}{b} \qquad \mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{b}{a} \tag{1.1}$$

$$\beta:\quad \sin\beta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad \cos\beta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad \mathrm{tg}\,\beta = \frac{b}{a} \qquad \mathrm{ctg}\,\beta = \frac{a}{b} \tag{1.2}$$

$$c = \sqrt{a^2+b^2} \qquad R = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2} = \frac{c}{2} \qquad m_c = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2} = \frac{c}{2} \tag{1.3}$$

$$h_c = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{ab}{c} \qquad h_a = b \qquad h_b = a \tag{1.4}$$

$$S = \frac{1}{2}ab \tag{1.5}$$

$$P = a+b+\sqrt{a^2+b^2} = a+b+c = 2p \tag{1.6}$$

$$r_c = \frac{a+b+\sqrt{a^2+b^2}}{2} = \frac{a+b+c}{2} = \frac{P}{2} = p$$

$$r = \frac{a+b-\sqrt{a^2+b^2}}{2} = \frac{a+b-c}{2} = \frac{ab}{a+b+\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{ab}{a+b+c} = p-c \tag{1.7}$$

$$r_a = \frac{a-b+\sqrt{a^2+b^2}}{2} = \frac{a-b+c}{2} = p-b \tag{1.8}$$

$$r_b = \frac{-a+b+\sqrt{a^2+b^2}}{2} = \frac{-a+b+c}{2} = p-a$$

$$l_c = \frac{ab\sqrt{2}}{a+b} \tag{1.9}$$

$$m_a = \sqrt{\frac{a^2}{4}+b^2} \qquad m_b = \sqrt{\frac{b^2}{4}+a^2} \tag{1.10}$$

$$a' = \frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{a^2}{c} \qquad b' = \frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{b^2}{c} \tag{1.11}$$

$$l_a = \frac{b}{a}\sqrt{2\left(a^2+b^2-b\sqrt{a^2+b^2}\right)} = b\sqrt{\frac{2\sqrt{a^2+b^2}}{b+\sqrt{a^2+b^2}}} = \frac{b}{a}\sqrt{2c\left(c-b\right)} \tag{1.12}$$

$$l_b = \frac{a}{b}\sqrt{2\left(a^2+b^2-a\sqrt{a^2+b^2}\right)} = a\sqrt{\frac{2\sqrt{a^2+b^2}}{a+\sqrt{a^2+b^2}}} = \frac{a}{b}\sqrt{2c\left(c-a\right)}$$

Зауваження 1. В роботі [12] зазначається, що розв'язування 24 задач (із 84 принципово різних задач II і III типу) в загальному вигляді зводяться до розв'язування рівнянь третього і четвертого (не біквадратних) степеня. Оскільки зазначені задачі є мало відомими та майже не висвітлено у математичній та методичній літературі, то наслідуючи авторів [12], маємо своїм обов'язком акцентувати увагу учнів, студентів та молодих вчителів саме на таких задачах:

1) $\{a,l_a\}$ $(\{b,l_b\})$;
2) $\{h_c,l_a\}$ $(\{h_c,l_b\})$;
3) $\{S,a'\}$ $(\{S,b'\})$;
4) $\{S,l_a\}$ $(\{S,l_b\})$;
5) $\{P,m_a\}$ $(\{P,m_b\})$;
6) $\{P,a'\}$ $(\{P,b'\})$;
7) $\{P,l_a\}$ $(\{P,l_b\})$;
8) $\{r,m_a\}$ $(\{r,m_b\})$;
9) $\{r,a'\}$ $(\{r,b'\})$;
10) $\{r,l_a\}$ $(\{r,l_b\})$;
11) $\{r_a,m_a\}$ $(\{r_b,m_b\})$;
12) $\{r_a,m_b\}$ $(\{r_b,m_a\})$;
13) $\{r_a,a'\}$ $(\{r_b,b'\})$;
14) $\{r_a,b'\}$ $(\{r_b,a'\})$;
15) $\{r_a,l_a\}$ $(\{r_b,l_b\})$;
16) $\{r_a,l_b\}$ $(\{r_b,l_a\})$;
17) $\{l_c,m_a\}$ $(\{l_c,m_b\})$;
18) $\{l_c,a'\}$ $(\{l_c,b'\})$;
19) $\{l_c,l_a\}$ $(\{l_c,l_b\})$;
20) $\{m_a,l_a\}$ $(\{m_b,l_b\})$;
21) $\{m_a,l_b\}$ $(\{m_b,l_a\})$;
22) $\{a',l_a\}$ $(\{b',l_b\})$;
23) $\{a',l_b\}$ $(\{b',l_a\})$;
24) $\{l_a,l_b\}$.

На рахунок наведених 24 задач автори представленої статті не виключають, що для деяких з них можуть існувати специфічні (штучні) заміни, які, з урахуванням необхідних додаткових досліджень в загальному випадку, дозволять подати їх розв'язки в явному вигляді.

Для решти 60 (із 84 принципово різних задач II і III типу в загальному вигляді) нижче в явному вигляді наведено розв'язки таких задач.

Відповідні розв'язки-формули подано у вигляді умовних таблиць, кожна з яких визначається одним з елементів прямокутного трикутника. А відповідні метричні співвідношення (для знаходження невідомих катетів) подано для пари «вихідних-відомих» (з фіксованого у статті набору) елементів, перший з яких у таблиці є спільним.

В різних таблицях зазначені розв'язки-формули (для однакових пар «вихідних-відомих» елементів) повторюються. Але таких підхід до подання розв'язків авторами зроблений свідомо. Одна з причин – цілісність та повнота (для фіксованого набору елементів прямокутного трикутника) подання матеріалу. Інша – намір спростити користування читачів наведеним у статті матеріалом та надія авторів на використання цільовою аудиторією у майбутньому наведених формул як довідкового матеріалу.

Через природні обмеження на обсяги статей нижче без додаткових пояснень наведено 11 (умовних) таблиць, що містять лише формули (без виводу та розв'язань) для знаходження невідомих катетів прямокутного трикутника за двома іншими його елементами з фіксованого переліку $\{a$; α; β; $c=2R=2m_c$; h_c, S; $P=2r_c$; r; r_a; r_b; l_c; m_a; m_b; a'; b'; l_a; $l_b\}$.

2. Формули для знаходження невідомого катета b (a) прямокутного трикутника за відомим катетом a (b) та одним з основних його елементів:

$\{a;\alpha\}$: $$b=\frac{a}{\sin\alpha}\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\frac{a}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}\cos\alpha=\frac{a}{\operatorname{tg}\alpha}=a\operatorname{ctg}\alpha \tag{2.1}$$

$\{a;\beta\}$: $$b=\frac{a}{\cos\beta}\sqrt{1-\cos^2\beta}=\frac{a}{\sqrt{1-\sin^2\beta}}\sin\beta=\frac{a}{\operatorname{ctg}\beta}=a\operatorname{tg}\beta$$

$\{a;c\}$: $$b=\sqrt{c^2-a^2} \tag{2.2}$$

$\{a;m_c\}$: $$b=\sqrt{(2m_c)^2-a^2}$$

$\{a;R\}$: $$b=\sqrt{(2R)^2-a^2}$$

$\{a;h_c\}$: $$b=\frac{ah_c}{\sqrt{a^2-h_c^2}} \tag{2.3}$$

$\{a;S\}$: $$b=\frac{2S}{a} \tag{2.4}$$

$\{a;P\}$: $$b=\frac{P(P-2a)}{2(P-a)}=\frac{P}{2}\left(1-\frac{a}{P-a}\right) \tag{2.5}$$

$\{a;r_c\}$: $$b=2r_c\cdot\frac{r_c-a}{2r_c-a}=2r_c\cdot\left(1-\frac{r_c}{2r_c-a}\right)$$

$\{a;r\}$: $$b=2r\cdot\frac{a-r}{a-2r}=2r\cdot\left(1+\frac{r}{a-2r}\right) \tag{2.6}$$

$\{a;r_a\}$: $$b=2r_a\cdot\frac{a-r_a}{2r_a-a}=2r_a\cdot\left(\frac{r_a}{2r_a-a}-1\right) \tag{2.7}$$

$\{a;r_b\}$: $$b=2r_b\cdot\frac{r_b+a}{2r_b+a}=2r_b\cdot\left(1-\frac{r_b}{2r_b+a}\right) \tag{2.8}$$

$\{a;l_c\}$: $$b=\frac{al_c}{a\sqrt{2}-l_c} \tag{2.9}$$

$\{a;m_a\}$: $$b=\sqrt{{m_a}^2-\frac{a^2}{4}} \tag{2.10}$$

$\{a;m_b\}$: $$b=2\sqrt{{m_b}^2-a^2} \tag{2.11}$$

$\{a;a'\}$: $$b=\frac{a}{a'}\sqrt{a^2-a'^2} \tag{2.12}$$

$\{a;b'\}$: $$b=\sqrt{\frac{b'^2+b'\sqrt{b'^2+4a^2}}{2}}=\sqrt{\frac{b'}{2}\left(\sqrt{b'^2+4a^2}+b'\right)} \tag{2.13}$$

$\{a;l_b\}$: $\quad b=\dfrac{l_b^2-a^2}{a-\sqrt{l_b^2-a^2}}=\dfrac{\left(l_b^2-a^2\right)\left(a+\sqrt{l_b^2-a^2}\right)}{2a^2-l_b^2}$ (2.14)

$\{a;l_a\}$: $\quad b$ – ***корінь рівняння***

$$l_a=\frac{b}{a}\sqrt{2\left(a^2+b^2-b\sqrt{a^2+b^2}\right)}$$

3. Формули для знаходження катетів a і b прямокутного трикутника за відомим кутом α та одним з основних його елементів:

$\{\alpha;c\}$: $\quad a=c\cdot\sin\alpha \qquad b=c\cdot\cos\alpha$ (3.1)

$\{\alpha;R\}$: $\quad a=2R\sin\alpha \qquad b=2R\cos\alpha$

$\{\alpha;m_c\}$: $\quad a=2m_c\sin\alpha \qquad b=2m_c\cos\alpha$

$\{\alpha;h_c\}$: $\quad a=\dfrac{h_c}{\cos\alpha} \qquad b=\dfrac{h_c}{\sin\alpha}$ (3.2)

$\{\alpha;S\}$: $\quad a=\sqrt{2S\,\mathrm{tg}\,\alpha} \qquad b=\sqrt{2S\,\mathrm{ctg}\,\alpha}$ (3.3)

$\{\alpha;P\}$: $\quad a=\dfrac{P\sin\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha+1} \qquad b=\dfrac{P\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha+1}$ (3.4)

$\{\alpha;r_c\}$: $\quad a=\dfrac{2r_c\sin\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha+1} \qquad b=\dfrac{2r_c\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha+1}$

$\{\alpha;r\}$: $\quad a=\dfrac{2r\sin\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha-1} \qquad b=\dfrac{2r\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha-1}$ (3.5)

$\{\alpha;r_a\}$: $\quad a=\dfrac{2r_a\sin\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha+1} \qquad b=\dfrac{2r_a\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha+1}$ (3.6)

$\{\alpha;r_b\}$: $\quad a=\dfrac{2r_b\sin\alpha}{-\sin\alpha+\cos\alpha+1} \qquad b=\dfrac{2r_b\cos\alpha}{-\sin\alpha+\cos\alpha+1}$ (3.7)

$\{\alpha;l_c\}$: $\quad a=\dfrac{l_c(\sin\alpha+\cos\alpha)}{\sqrt{2}\cos\alpha} \qquad b=\dfrac{l_c(\sin\alpha+\cos\alpha)}{\sqrt{2}\sin\alpha}$ (3.8)

$\{\alpha;m_a\}$: $\quad a=\dfrac{2m_a\sin\alpha}{\sqrt{\sin^2\alpha+4\cos^2\alpha}} \qquad b=\dfrac{2m_a\cos\alpha}{\sqrt{\sin^2\alpha+4\cos^2\alpha}}$ (3.9)

$\{\alpha;m_b\}$: $\quad a=\dfrac{2m_b\sin\alpha}{\sqrt{4\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}} \qquad b=\dfrac{2m_b\cos\alpha}{\sqrt{4\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}}$ (3.10)

$\{\alpha;a'\}$: $\quad a=\dfrac{a'}{\sin\alpha} \qquad b=\dfrac{a'\cos\alpha}{\sin^2\alpha}$ (3.11)

$\{\alpha;b'\}$: $\quad a=\dfrac{b'\sin\alpha}{\cos^2\alpha} \qquad b=\dfrac{b'}{\cos\alpha}$ (3.12)

$\{\alpha;l_a\}$: $\quad a=l_a\cos\dfrac{\alpha}{2}\,\mathrm{tg}\,\alpha \qquad b=l_a\cos\dfrac{\alpha}{2}$ (3.13)

$\{\alpha;l_b\}$: $\quad a=l_b\sqrt{0,5\cdot(1+\sin\alpha)}\,\mathrm{tg}\,\alpha \qquad b=l_b\sqrt{0,5\cdot(1+\sin\alpha)}$ (3.14)

Зауваження 2. Одним з основних підходів до одержання формул-розв'язків для наведених нижче задач є розв'язання відповідної системи рівнянь (з урахуванням співвідношень (1.1) – (1.12)) з двома змінними a і b. Проте такий підхід не завжди є найбільш раціональним у порівнянні з прийомами застосування допоміжного кута, кола та допоміжних побудов тощо. Крім того, формальне розв'язування відповідної системи (залишаючи за лаштунками визначення та основні метричні співвідношення для елементів прямокутного трикутника) не завжди призводить до правильної відповіді, а інколи, навіть сильних учнів та студентів призводить до помилкового висновку щодо декількох розв'язків. На захист зазначеного підходу слід відзначити принципову можливість на уроках алгебри під час вдосконалення навичок з розв'язування систем рівнянь з двома змінними, дидактичний матеріал наповнити задачами геометричного змісту.

Специфіка зазначеного вище способу полягає у необхідності проведення додаткових досліджень у таких ситуаціях, як:

1) якщо розв'язання системи зводиться до розв'язання квадратного або біквадратного рівняння, то необхідно переконатися в тому, що дискримінант набуває невід'ємних значень для відповідної пари елементів прямокутного трикутника; причому, якщо дискримінант вдається подати у вигляді квадрату многочлена, то його слід подавати з невід'ємною основою;

2) обов'язково перевірити, який з коренів (квадратного/біквадратного) рівняння для визначення невідомого a (чи b) набуває додатних значень;

якщо обидва корені додатні (такі приклади є серед задач нижче), то необхідно додатково перевірити, який з них суперечить основним метричним співвідношенням для елементів прямокутного трикутника;

3) якщо формули для кожного з двох елементів (за якими визначаємо невідомі a і b) прямокутного трикутника є симетричними відносно a і b, то відповідна система буде симетричною та матиме два симетричні розв'язки; проте, з урахуванням ознаки рівності прямокутних трикутників «за двома катетами», таку пару симетричних розв'язків слід вважати одним розв'язком, бо довжини катетів (без позначень) визначаються однозначно; іншими словами – якщо такий прямокутний трикутник існує, то, з точністю до рівності фігур, він є єдиним).

4. Формули для знаходження катетів a і b прямокутного трикутника за гіпотенузою c (радіусом R / медіаною m_c) та одним з його елементів:

$\{c;\alpha\}$: $$a = c\cdot\sin\alpha \qquad b = c\cdot\cos\alpha \tag{4.1}$$
$$a = 2R\cdot\sin\alpha = 2m_c\cdot\sin\alpha \qquad b = 2R\cdot\cos\alpha = 2m_c\cdot\cos\alpha$$

$\{c;\beta\}$: $$a = c\cdot\cos\beta \qquad b = c\cdot\sin\beta$$
$$a = 2R\cdot\cos\beta = 2m_c\cdot\cos\beta \qquad b = 2R\cdot\sin\beta = 2m_c\cdot\sin\beta$$

$\{c;h_c\}$: $$a,b = 0,5\cdot\left(\sqrt{c^2+2ch_c}\mp\sqrt{c^2-2ch_c}\right) \tag{4.2}$$

$\{R;h_c\}$: $$a,b=\sqrt{R^2+Rh_c}\mp\sqrt{R^2-Rh_c}$$

$\{c;S\}$: $$a,b=0,5\cdot\left(\sqrt{c^2+4S}\mp\sqrt{c^2-4S}\right) \tag{4.3}$$

$\{R;S\}$: $$a,b=\sqrt{R^2+S}\mp\sqrt{R^2-S}$$

$\{m_c;S\}$: $$a,b=\sqrt{m_c^2+S}\mp\sqrt{m_c^2-S}$$

$\{c;P\}$: $$a,b=0,5\cdot\left(P-c\mp\sqrt{(P+c)^2-2P^2}\right) \tag{4.4}$$

$\{c;r_c\}$: $$a,b=0,5\cdot\left(2r_c-c\mp\sqrt{(2r_c+c)^2-8r_c^2}\right)$$

$\{R;r_c\}$: $$a,b=r_c-R\mp\sqrt{(r_c+R)^2-2r_c^2}$$

$\{c;r\}$: $$a,b=0,5\cdot\left(c+2r\mp\sqrt{c^2-4rc-4r^2}\right) \tag{4.5}$$

$\{R;r\}$: $$a,b=R+r\mp\sqrt{(R-r)^2-2r^2}$$

$\{c;r_a\}$: $$a=\frac{2r_a-c+\sqrt{c^2+4cr_a-4r_a^2}}{2} \qquad b=\frac{c-2r_a+\sqrt{c^2+4cr_a-4r_a^2}}{2} \tag{4.6}$$

$\{R;r_a\}$: $$a=r_a-R+\sqrt{(R+r_a)^2-2r_a^2} \qquad b=R-r_a+\sqrt{(R+r_a)^2-2r_a^2}$$

$\{c;r_b\}$: $$a=\frac{c-2r_b+\sqrt{c^2+4cr_b-4r_b^2}}{2} \qquad b=\frac{2r_b-c+\sqrt{c^2+4cr_b-4r_b^2}}{2}$$

$\{R;r_b\}$: $$a=R-r_b+\sqrt{(R+r_b)^2-2r_b^2} \qquad b=r_b-R+\sqrt{(R+r_b)^2-2r_b^2}$$

$\{c;l_c\}$: $$a,b=\sqrt{\frac{c^2\mp\sqrt{c^4-l_c^2\left(l_c+\sqrt{l_c^2+2c^2}\right)^2}}{2}} \tag{4.7}$$

$\{c;m_a\}$: $$a=2\sqrt{\frac{c^2-m_a^2}{3}} \qquad b=\sqrt{\frac{4m_a{}^2-c^2}{3}} \tag{4.8}$$

$\{c;m_b\}$: $$a=\sqrt{\frac{4m_b{}^2-c^2}{3}} \qquad b=2\sqrt{\frac{c^2-m_b^2}{3}}$$

$\{c;a'\}$: $$a=\sqrt{a'\cdot c} \qquad b=\sqrt{c^2-a'\cdot c}=\sqrt{(c-a')c} \tag{4.9}$$

$\{c;b'\}$: $$a=\sqrt{c^2-b'\cdot c}=\sqrt{(c-b')c} \qquad b=\sqrt{b'\cdot c}$$

$\{c;l_a\}$: $$a=\frac{1}{4c}\cdot\sqrt{16c^4-l_a^2\left(l_a+\sqrt{l_a^2+8c^2}\right)^2};\; b=\frac{l_a}{4c}\left(l_a+\sqrt{l_a^2+8c^2}\right) \tag{4.10}$$

$\{c;l_b\}$: $$a=\frac{l_b}{4c}\left(l_b+\sqrt{l_b^2+8c^2}\right);\; b=\frac{1}{4c}\cdot\sqrt{16c^4-l_b^2\left(l_b+\sqrt{l_b^2+8c^2}\right)^2} \tag{4.11}$$

5. Формули для знаходження катетів a і b прямокутного трикутника за висотою h_c та одним з основних його елементів:

$$\{h_c;\alpha\}: \quad a=\frac{h_c}{\cos\alpha} \qquad b=\frac{h_c}{\sin\alpha} \tag{5.1}$$

$$\{h_c;\beta\}: \quad a=h_c/\sin\beta \qquad b=h_c/\cos\beta$$

$$\{h_c;c\}: \quad a,b=\frac{1}{2}\left(\sqrt{c^2+2ch_c}\mp\sqrt{c^2-2ch_c}\right) \tag{5.2}$$

$$\{h_c;R\}: \quad a,b=\sqrt{R}\left(\sqrt{R+h_c}\mp\sqrt{R-h_c}\right)$$

$$\{h_c;m_c\}: \quad a,b=\sqrt{m_c}\left(\sqrt{m_c+h_c}\mp\sqrt{m_c-h_c}\right)$$

$$\{h_c;S\}: \quad a,b=\sqrt{S}\left(\sqrt{\frac{S}{h_c^2}+1}\mp\sqrt{\frac{S}{h_c^2}-1}\right) \tag{5.3}$$

$$\{h_c;P\}: \quad a,b=\frac{P}{4(P+h_c)}\left(P+2h_c\mp\sqrt{P^2-4Ph_c-4h_c^2}\right) \tag{5.4}$$

$$\{h_c;r_c\}: \quad a,b=\frac{r_c}{2r_c+h_c}\left(r_c+h_c\mp\sqrt{(r_c-h_c)^2-2h_c^2}\right)$$

$$\{h_c;r\}: \quad a,b=\frac{r}{h_c-2r}\left(h_c-r\mp\sqrt{(h_c+r)^2-2h_c^2}\right) \tag{5.5}$$

$$\{h_c;r_a\}: \quad a=\frac{r_a}{2r_a-h_c}\left(r_a-h_c+\sqrt{(r_a+h_c)^2-2h_c^2}\right) \qquad b=\frac{r_a}{2r_a-h_c}\left(h_c-r_a+\sqrt{(r_a+h_c)^2-2h_c^2}\right) \tag{5.6}$$

$$\{h_c;r_b\}: \quad a=\frac{r_b}{2r_b-h_c}\left(h_c-r_b+\sqrt{(r_b+h_c)^2-2h_c^2}\right) \qquad b=\frac{r_b}{2r_b-h_c}\left(r_b-h_c+\sqrt{(r_b+h_c)^2-2h_c^2}\right)$$

$$\{h_c;l_c\}: \quad a,b=\frac{\sqrt{2}h_cl_c}{2h_c^2-l_c^2}\left(h_c\mp\sqrt{l_c^2-h_c^2}\right) \tag{5.7}$$

$$\{h_c;m_a\}: \quad a=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{4m_a^2-3h_c^2+\sqrt{\left(4m_a^2-3h_c^2\right)^2-16m_a^2h_c^2}} \qquad b=\frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{4m_a^2+3h_c^2-\sqrt{\left(4m_a^2+3h_c^2\right)^2-64m_a^2h_c^2}} \tag{5.8}$$

$$\{h_c;m_b\}: \quad a=\frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{4m_b^2+3h_c^2-\sqrt{\left(4m_b^2+3h_c^2\right)^2-64m_b^2h_c^2}} \qquad b=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{4m_b^2-3h_c^2+\sqrt{\left(4m_b^2-3h_c^2\right)^2-16m_b^2h_c^2}}$$

$\{h_c;a'\}$: $a=\sqrt{h_c^2+a'^2}$ $b=\dfrac{h_c}{a'}\sqrt{h_c^2+a'^2}$ (5.9)

$\{h_c;b'\}$: $a=\dfrac{h_c}{b'}\sqrt{h_c^2+b'^2}$ $b=\sqrt{h_c^2+b'^2}$

6. Формули для знаходження катетів a і b прямокутного трикутника за площею S та одним з основних його елементів:

$\{S;\alpha\}$: $a=\sqrt{2S\cdot\operatorname{tg}\alpha}$ $b=\sqrt{2S\cdot\operatorname{ctg}\alpha}$ (6.1)

$\{S;\beta\}$: $a=\sqrt{2S\cdot\operatorname{ctg}\beta}$ $b=\sqrt{2S\cdot\operatorname{tg}\beta}$

$\{S;c\}$: $$a,b=0,5\cdot\left(\sqrt{c^2+4S}\mp\sqrt{c^2-4S}\right) \quad (6.2)$$

$\{S;R\}$: $$a,b=\sqrt{R^2+S}\mp\sqrt{R^2-S}$$

$\{S;m_c\}$: $$a,b=\sqrt{m_c^2+S}\mp\sqrt{m_c^2-S}$$

$\{S;h_c\}$: $$a,b=\sqrt{S}\left(\sqrt{\frac{S}{h_c^2}+1}\mp\sqrt{\frac{S}{h_c^2}-1}\right) \quad (6.3)$$

$\{S;P\}$: $$a,b=\frac{P^2+4S\mp\sqrt{\left(P^2-4S\left(3-2\sqrt{2}\right)\right)\left(P^2-4S\left(3+2\sqrt{2}\right)\right)}}{4P} \quad (6.4)$$

$\{S;r_c\}$: $$a,b=\frac{r_c^2+S\mp\sqrt{\left(r_c^2-S\left(3-2\sqrt{2}\right)\right)\left(r_c^2-S\left(3+2\sqrt{2}\right)\right)}}{2r_c}$$

$\{S;r\}$: $$a,b=\frac{r^2+S\mp\sqrt{\left(r^2-S\left(3-2\sqrt{2}\right)\right)\left(r^2-S\left(3+2\sqrt{2}\right)\right)}}{2r}=\frac{S+r^2\mp\sqrt{\left(S-r^2\left(3-2\sqrt{2}\right)\right)\left(S-r^2\left(3+2\sqrt{2}\right)\right)}}{2r} \quad (6.5)$$

$\{S;r_a\}$: $a=\dfrac{r_a^2-S+\sqrt{\left(S-r_a^2\right)^2+8Sr_a^2}}{2r_a}$ $b=\dfrac{S-r_a^2+\sqrt{\left(S-r_a^2\right)^2+8Sr_a^2}}{2r_a}$ (6.6)

$\{S;r_b\}$: $a=\dfrac{S-r_b^2+\sqrt{\left(S-r_b^2\right)^2+8Sr_b^2}}{2r_b}$ $b=\dfrac{r_b^2-S+\sqrt{\left(S-r_b^2\right)^2+8Sr_b^2}}{2r_b}$

$\{S;l_c\}$: $$a,b=\frac{\sqrt{2}}{l_c}\left(S\mp\sqrt{S\left(S-l_c^2\right)}\right) \quad (6.7)$$

$\{S;m_a\}$: $a=\sqrt{2}\sqrt{m_a^2-\sqrt{m_a^4-4S^2}}$ $b=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{m_a^2+\sqrt{m_a^4-4S^2}}$ (6.8)

$\{S;m_b\}$: $a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{m_b^2+\sqrt{m_b^4-4S^2}}$ $b=\sqrt{2}\sqrt{m_b^2-\sqrt{m_b^4-4S^2}}$

DOI: https://doi.org/...

7. Формули для знаходження катетів a і b прямокутного трикутника за периметром P (радіусом $r_c = p$) та одним з основних його елементів:

$\{P;\alpha\}$: $$a=\frac{P\sin\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha+1} \qquad b=\frac{P\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha+1} \tag{7.1}$$

$\{r_c;\alpha\}$: $$a=\frac{2r_c\sin\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha+1} \qquad b=\frac{2r_c\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha+1}$$

$\{P;\beta\}$: $$a=\frac{P\cos\beta}{\sin\beta+\cos\beta+1} \qquad b=\frac{P\sin\beta}{\sin\beta+\cos\beta+1}$$

$\{r_c;\beta\}$: $$a=\frac{2r_c\cos\beta}{\sin\beta+\cos\beta+1} \qquad b=\frac{2r_c\sin\beta}{\sin\beta+\cos\beta+1}$$

$\{P;c\}$: $$a,b=0,5\cdot\left(P-c\mp\sqrt{(P+c)^2-2P^2}\right) \tag{7.2}$$

$\{P;R\}$: $$a,b=0,5\cdot\left(P-2R\mp\sqrt{(P+2R)^2-2P^2}\right)$$

$\{P;m_c\}$: $$a,b=0,5\cdot\left(P-2m_c\mp\sqrt{(P+2m_c)^2-2P^2}\right)$$

$\{r_c;c\}$: $$a,b=0,5\cdot\left(2r_c-c\mp\sqrt{(2r_c+c)^2-8r_c^2}\right)$$

$\{r_c;R\}$: $$a,b=r_c-R\mp\sqrt{(r_c+R)^2-2r_c^2}$$

$\{r_c;m_c\}$: $$a,b=r_c-m_c\mp\sqrt{(r_c+m_c)^2-2r_c^2}$$

$\{P;h_c\}$: $$a,b=\frac{P}{4(P+h_c)}\left(P+2h_c\mp\sqrt{P^2-4Ph_c-4h_c^2}\right) \tag{7.3}$$

$\{r_c;h_c\}$: $$a,b=\frac{r_c}{2r_c+h_c}\left(r_c+h_c\mp\sqrt{(r_c-h_c)^2-2h_c^2}\right)$$

$\{P;S\}$: $$a,b=\frac{P^2+4S\mp\sqrt{\left(P^2-4S\left(3-2\sqrt{2}\right)\right)\left(P^2-4S\left(3+2\sqrt{2}\right)\right)}}{4P} \tag{7.4}$$

$\{r_c;S\}$: $$a,b=\frac{r_c^2+S\mp\sqrt{\left(r_c^2-S\left(3-2\sqrt{2}\right)\right)\left(r_c^2-S\left(3+2\sqrt{2}\right)\right)}}{2r_c}$$

$\{P;r\}$: $$a,b=0,25\cdot\left(P+2r\mp\sqrt{(P+2r)^2-16Pr}\right) \tag{7.5}$$

$\{r_c;r\}$: $$a,b=0,5\cdot\left(r_c+r\mp\sqrt{(r_c+r)^2-8r_cr}\right)$$

$\{P;r_a\}$: $$a=\frac{2Pr_a}{P+2r_a} \qquad b=\frac{P}{2}-r_a \tag{7.6}$$

$\{P;r_b\}$: $a=\dfrac{P}{2}-r_b$ $\qquad b=\dfrac{2Pr_b}{P+2r_b}$

$\{r_c;r_a\}$: $a=2r_cr_a/(r_c+r_a)$ $\qquad b=r_c-r_a$

$\{r_c;r_b\}$: $a=r_c-r_b$ $\qquad b=2r_cr_b/(r_c+r_b)$

$$\{P;l_c\}:\quad a,b=\frac{P\left(P\mp\sqrt{\left(P-2\sqrt{2}l_c-2l_c\right)\left(P-2\sqrt{2}l_c+2l_c\right)}\right)}{2\left(2P-l_c\sqrt{2}\right)} \tag{7.7}$$

$$\{r_c;l_c\}:\quad a,b=\frac{2r_c\left(r_c\mp\sqrt{\left(r_c-l_c\sqrt{2}-l_c\right)\left(r_c-l_c\sqrt{2}+l_c\right)}\right)}{4r_c-l_c\sqrt{2}}$$

8. Формули для знаходження катетів a і b прямокутного трикутника за радіусом r та одним з основних його елементів:

$$\{r;\alpha\}:\quad a=\frac{2r\sin\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha-1}\qquad b=\frac{2r\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha-1} \tag{8.1}$$

$$\{r;\beta\}:\quad a=\frac{2r\cos\beta}{\cos\beta+\sin\beta-1}\qquad b=\frac{2r\sin\beta}{\cos\beta+\sin\beta-1}$$

$$\{r;c\}:\quad a,b=0,5\cdot\left(c+2r\mp\sqrt{c^2-4rc-4r^2}\right) \tag{8.2}$$

$$\{r;R\}:\quad a=R+r\mp\sqrt{(R-r)^2-2r^2}\qquad b=R+r\pm\sqrt{(R-r)^2-2r^2}$$

$$\{r;m_c\}:\quad a=m_c+r\mp\sqrt{(m_c-r)^2-2r^2}\qquad b=m_c+r\pm\sqrt{(m_c-r)^2-2r^2}$$

$$\{r;h_c\}:\quad a,b=\frac{r}{h_c-2r}\left(h_c-r\mp\sqrt{(h_c+r)^2-2h_c^2}\right) \tag{8.3}$$

$$\{r;S\}:\quad a,b=\frac{S+r^2\mp\sqrt{\left(S-r^2\left(3-2\sqrt{2}\right)\right)\left(S-r^2\left(3+2\sqrt{2}\right)\right)}}{2r} \tag{8.4}$$

$$\{r;P\}:\quad a,b=0,25\cdot\left(P+2r\mp\sqrt{(P+2r)^2-16Pr}\right) \tag{8.5}$$

$$\{r;r_c\}:\quad a,b=0,5\cdot\left(r_c+r\mp\sqrt{(r_c+r)^2-8r_cr}\right)$$

$$\{r;r_a\}:\quad a=r+r_a\qquad b=\frac{2rr_a}{r_a-r} \tag{8.6}$$

$$\{r;r_b\}:\quad a=\frac{2rr_b}{r_b-r}\qquad b=r+r_b$$

$$\{r;l_c\}:\quad a,b=\frac{2r\left(r\mp\sqrt{\left(r-l_c\sqrt{2}-l_c\right)\left(r-l_c\sqrt{2}+l_c\right)}\right)}{4r-l_c\sqrt{2}} \tag{8.7}$$

9. Формули для знаходження катетів a і b прямокутного трикутника за радіусом $r_a = p - b$ ($r_b = p - a$) та одним з основних його елементів:

$$\{r_a;\alpha\}:\quad a = \frac{2r_a\sin\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha + 1}\qquad b = \frac{2r_a\cos\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha + 1}\tag{9.1}$$

$$\{r_a;\beta\}:\quad a = \frac{2r_a\cos\beta}{\cos\beta - \sin\beta + 1}\qquad b = \frac{2r_a\sin\beta}{\cos\beta - \sin\beta + 1}$$

$$\{r_b;\alpha\}:\quad a = \frac{2r_b\sin\alpha}{-\sin\alpha + \cos\alpha + 1}\qquad b = \frac{2r_b\cos\alpha}{-\sin\alpha + \cos\alpha + 1}$$

$$\{r_b;\beta\}:\quad a = \frac{2r_b\cos\beta}{-\cos\beta + \sin\beta + 1}\qquad b = \frac{2r_b\sin\beta}{-\cos\beta + \sin\beta + 1}$$

$$\{r_a;c\}:\quad a = r_a - R + \sqrt{(R + r_a)^2 - 2r_a^2}\qquad b = R - r_a + \sqrt{(R + r_a)^2 - 2r_a^2}\tag{9.2}$$

$$\{r_a;R\}:\quad a = r_a - R + \sqrt{(R + r_a)^2 - 2r_a^2}\qquad b = R - r_a + \sqrt{(R + r_a)^2 - 2r_a^2}$$

$$\{r_a;m_c\}:\quad a = r_a - m_c + \sqrt{(m_c + r_a)^2 - 2r_a^2}\qquad b = m_c - r_a + \sqrt{(m_c + r_a)^2 - 2r_a^2}$$

$$\{r_b;c\}:\quad a = \frac{c - 2r_b + \sqrt{c^2 + 4cr_b - 4r_b^2}}{2}\qquad b = \frac{2r_b - c + \sqrt{c^2 + 4cr_b - 4r_b^2}}{2}$$

$$\{r_b;R\}:\quad a = R - r_b + \sqrt{(R + r_b)^2 - 2r_b^2}\qquad b = r_b - R + \sqrt{(R + r_b)^2 - 2r_b^2}$$

$$\{r_b;m_c\}:\quad a = m_c - r_b + \sqrt{(m_c + r_b)^2 - 2r_b^2}\qquad b = r_b - m_c + \sqrt{(m_c + r_b)^2 - 2r_b^2}$$

$$\{r_a;h_c\}:\quad a = \frac{r_a}{2r_a - h_c}\left(r_a - h_c + \sqrt{(r_a + h_c)^2 - 2h_c^2}\right);\tag{9.3}$$

$$b = \frac{r_a}{2r_a - h_c}\left(h_c - r_a + \sqrt{(r_a + h_c)^2 - 2h_c^2}\right)$$

$$\{r_b;h_c\}:\quad a = \frac{r_b}{2r_b - h_c}\left(h_c - r_b + \sqrt{(r_b + h_c)^2 - 2h_c^2}\right);$$

$$b = \frac{r_b}{2r_b - h_c}\left(r_b - h_c + \sqrt{(r_b + h_c)^2 - 2h_c^2}\right)$$

$$\{r_a;S\}:\quad a = \frac{r_a^2 - S + \sqrt{\left(S - r_a^2\right)^2 + 8Sr_a^2}}{2r_a}\qquad b = \frac{S - r_a^2 + \sqrt{\left(S - r_a^2\right)^2 + 8Sr_a^2}}{2r_a}\tag{9.4}$$

$$\{r_b;S\}:\quad a = \frac{S - r_b^2 + \sqrt{\left(S - r_b^2\right)^2 + 8Sr_b^2}}{2r_b}\qquad b = \frac{r_b^2 - S + \sqrt{\left(S - r_b^2\right)^2 + 8Sr_b^2}}{2r_b}$$

$$\{r_a;P\}:\quad a = \frac{2Pr_a}{P + 2r_a}\qquad b = \frac{P}{2} - r_a\tag{9.5}$$

$$\{r_a;r_c\}:\quad a=\frac{2r_cr_a}{r_c+r_a}\qquad b=r_c-r_a$$

$$\{r_b;P\}:\quad a=\frac{P}{2}-r_b\qquad b=\frac{2Pr_b}{P+2r_b}$$

$$\{r_b;r_c\}:\quad a=r_c-r_b\qquad b=\frac{2r_cr_b}{r_c+r_b}$$

$$\{r_a;r\}:\quad a=r+r_a\qquad b=\frac{2rr_a}{r_a-r}\tag{9.6}$$

$$\{r_b;r\}:\quad a=\frac{2rr_b}{r_b-r}\qquad b=r+r_b$$

$$\{r_a;r_b\}:\quad a=\frac{\sqrt{r_a^2+6r_ar_b+r_b^2}+r_a-r_b}{2}\qquad b=\frac{\sqrt{r_a^2+6r_ar_b+r_b^2}-r_a+r_b}{2}\tag{9.7}$$

$$\{r_a;l_c\}:\quad a=\frac{2r_a\left(r_a+b\right)}{2r_a+b}=\frac{bl_c\sqrt{2}}{2b-l_c\sqrt{2}}=\frac{r_a+l_c\sqrt{2}+\sqrt{r_a^2+l_c^2}}{4r_a+l_c\sqrt{2}}\cdot 2r_a\tag{9.8}$$

$$b=\frac{2r_a\left(a-r_a\right)}{2r_a-a}=\frac{al_c\sqrt{2}}{2a-l_c\sqrt{2}}=\frac{l_c\sqrt{2}-r_a+\sqrt{r_a^2+l_c^2}}{4r_a-l_c\sqrt{2}}\cdot 2r_a$$

$$\{r_b;l_c\}:\quad a=\frac{2r_b\left(b-r_b\right)}{2r_b-b}=\frac{bl_c\sqrt{2}}{2b-l_c\sqrt{2}}=\frac{l_c\sqrt{2}-r_b+\sqrt{r_b^2+l_c^2}}{4r_b-l_c\sqrt{2}}\cdot 2r_b$$

$$b=\frac{2r_b\left(r_b+a\right)}{2r_b+a}=\frac{al_c\sqrt{2}}{2a-l_c\sqrt{2}}=\frac{r_b+l_c\sqrt{2}+\sqrt{r_b^2+l_c^2}}{4r_b+l_c\sqrt{2}}\cdot 2r_b$$

10. Формули для знаходження катетів a і b прямокутного трикутника за бісектрисою l_c та одним з основних його елементів:

$$\{l_c;\alpha\}:\quad a=\frac{l_c(\sin\alpha+\cos\alpha)}{\sqrt{2}\cos\alpha}\qquad b=\frac{l_c(\sin\alpha+\cos\alpha)}{\sqrt{2}\sin\alpha}\tag{10.1}$$

$$\{l_c;\beta\}:\quad a=\frac{l_c(\cos\beta+\sin\beta)}{\sqrt{2}\sin\beta}\qquad b=\frac{l_c(\cos\beta+\sin\beta)}{\sqrt{2}\cos\beta}$$

$$\{l_c;c\}:\quad a,b=\sqrt{\frac{c^2\mp\sqrt{c^4-l_c^2\left(l_c+\sqrt{l_c^2+2c^2}\right)^2}}{2}}\tag{10.2}$$

$$\{l_c;R\}:\quad a,b=\sqrt{\frac{4R^2\mp\sqrt{16R^4-l_c^2\left(l_c+\sqrt{l_c^2+8R^2}\right)^2}}{2}}$$

DOI: https://doi.org/...

$\{l_c;m_c\}$: $$a,b=\sqrt{\frac{4m_c^2\mp\sqrt{16m_c^4-l_c^2\left(l_c+\sqrt{l_c^2+8m_c^2}\right)^2}}{2}}$$

$\{l_c;h_c\}$: $$a,b=\frac{\sqrt{2}h_c l_c}{2h_c^2-l_c^2}\left(h_c\mp\sqrt{l_c^2-h_c^2}\right) \quad (10.3)$$

$\{l_c;S\}$: $$a,b=\frac{\sqrt{2}}{l_c}\left(S\mp\sqrt{S\left(S-l_c^2\right)}\right) \quad (10.4)$$

$\{l_c;P\}$: $$a,b=\frac{P\left(P\mp\sqrt{\left(P-2\sqrt{2}l_c-2l_c\right)\left(P-2\sqrt{2}l_c+2l_c\right)}\right)}{2\left(2P-l_c\sqrt{2}\right)} \quad (10.5)$$

$\{l_c;r_c\}$: $$a,b=\frac{2r_c\left(r_c\mp\sqrt{\left(r_c-l_c\sqrt{2}-l_c\right)\left(r_c-l_c\sqrt{2}+l_c\right)}\right)}{4r_c-l_c\sqrt{2}}$$

$\{l_c;r\}$: $$a,b=\frac{2r\left(r\mp\sqrt{\left(r-l_c\sqrt{2}-l_c\right)\left(r-l_c\sqrt{2}+l_c\right)}\right)}{4r-l_c\sqrt{2}} \quad (10.6)$$

$\{l_c;r_a\}$: $$a=\frac{2r_a\left(r_a+b\right)}{2r_a+b}=\frac{bl_c\sqrt{2}}{2b-l_c\sqrt{2}}=\frac{r_a+l_c\sqrt{2}+\sqrt{r_a^2+l_c^2}}{4r_a+l_c\sqrt{2}}\cdot 2r_a \quad (10.7)$$

$$b=\frac{2r_a\left(a-r_a\right)}{2r_a-a}=\frac{al_c\sqrt{2}}{2a-l_c\sqrt{2}}=\frac{l_c\sqrt{2}-r_a+\sqrt{r_a^2+l_c^2}}{4r_a-l_c\sqrt{2}}\cdot 2r_a$$

$\{l_c;r_b\}$: $$a=\frac{2r_b\left(b-r_b\right)}{2r_b-b}=\frac{bl_c\sqrt{2}}{2b-l_c\sqrt{2}}=\frac{l_c\sqrt{2}-r_b+\sqrt{r_b^2+l_c^2}}{4r_b-l_c\sqrt{2}}\cdot 2r_b$$

$$b=\frac{2r_b\left(r_b+a\right)}{2r_b+a}=\frac{al_c\sqrt{2}}{2a-l_c\sqrt{2}}=\frac{r_b+l_c\sqrt{2}+\sqrt{r_b^2+l_c^2}}{4r_b+l_c\sqrt{2}}\cdot 2r_b$$

11. Формули для знаходження катетів a і b прямокутного трикутника за медіаною m_a (m_b) та одним з основних його елементів:

$\{m_a;\alpha\}$: $$a=\frac{2m_a\sin\alpha}{\sqrt{\sin^2\alpha+4\cos^2\alpha}} \qquad b=\frac{2m_a\cos\alpha}{\sqrt{\sin^2\alpha+4\cos^2\alpha}} \quad (11.1)$$

$\{m_a;\beta\}$: $$a=\frac{2m_a\cos\beta}{\sqrt{\cos^2\beta+4\sin^2\beta}} \qquad b=\frac{2m_a\sin\beta}{\sqrt{\cos^2\beta+4\sin^2\beta}}$$

$\{m_b;\alpha\}$: $$a=\frac{2m_b\sin\alpha}{\sqrt{4\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}} \qquad b=\frac{2m_b\cos\alpha}{\sqrt{4\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}}$$

$$\{m_b;\beta\}:\quad a=\frac{2m_b\cos\beta}{\sqrt{4\cos^2\beta+\sin^2\beta}}\qquad b=\frac{2m_b\sin\beta}{\sqrt{4\cos^2\beta+\sin^2\beta}}$$

$$\{m_a;c\}:\quad a=2\sqrt{\frac{c^2-m_a^2}{3}}\qquad b=\sqrt{\frac{4m_a{}^2-c^2}{3}}\tag{11.2}$$

$$\{m_b;c\}:\quad a=\sqrt{\frac{4m_b{}^2-c^2}{3}}\qquad b=2\sqrt{\frac{c^2-m_b^2}{3}}$$

$$\{m_a;R\}:\quad a=2\sqrt{\frac{4R^2-m_a^2}{3}}\qquad b=2\sqrt{\frac{m_a{}^2-R^2}{3}}\tag{11.3}$$

$$\{m_b;R\}:\quad a=2\sqrt{\frac{m_b{}^2-R^2}{3}}\qquad b=2\sqrt{\frac{4R^2-m_b^2}{3}}$$

$$\{m_a;m_c\}:\quad a=2\sqrt{\frac{4m_c^2-m_a^2}{3}}\qquad b=2\sqrt{\frac{m_a{}^2-m_c^2}{3}}\tag{11.4}$$

$$\{m_b;m_c\}:\quad a=2\sqrt{\frac{m_b{}^2-m_c^2}{3}}\qquad b=2\sqrt{\frac{4m_c^2-m_b^2}{3}}$$

$$\{m_a;h_c\}:\quad a=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{4m_a^2-3h_c^2+\sqrt{\left(4m_a^2-3h_c^2\right)^2-16m_a^2h_c^2}}\tag{11.5}$$

$$b=\frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{4m_a^2+3h_c^2-\sqrt{\left(4m_a^2+3h_c^2\right)^2-64m_a^2h_c^2}}$$

$$\{m_b;h_c\}:\quad a=\frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{4m_b^2+3h_c^2-\sqrt{\left(4m_b^2+3h_c^2\right)^2-64m_b^2h_c^2}}$$

$$b=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{4m_b^2-3h_c^2+\sqrt{\left(4m_b^2-3h_c^2\right)^2-16m_b^2h_c^2}}$$

$$\{m_a;S\}:\quad a=\sqrt{2}\sqrt{m_a^2-\sqrt{m_a^4-4S^2}}\qquad b=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{m_a^2+\sqrt{m_a^4-4S^2}}\tag{11.6}$$

$$\{m_b;S\}:\quad a=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{m_b^2+\sqrt{m_b^4-4S^2}}\qquad b=\sqrt{2}\sqrt{m_b^2-\sqrt{m_b^4-4S^2}}$$

$$\{m_a;m_b\}:\quad a=2\sqrt{\frac{4m_b{}^2-m_a^2}{15}}\qquad b=2\sqrt{\frac{4m_a{}^2-m_b^2}{15}}\tag{11.7}$$

$$\{m_a;a'\}:\quad a=\sqrt{\frac{a'\left(3a'+\sqrt{9a'^2+64m_a^2}\right)}{8}};\ b=\sqrt{m_a^2-\frac{3a'^2+a'\sqrt{9a'^2+64m_a^2}}{32}}\tag{11.8}$$

$$\{m_b;b'\}:\quad a=\sqrt{m_b^2-\frac{3b'^2+b'\sqrt{9b'^2+64m_b^2}}{32}};\ b=\sqrt{\frac{b'\left(3b'+\sqrt{9b'^2+64m_b^2}\right)}{8}}$$

$\{m_b;a'\}$: $$a=\sqrt{\frac{a'\left(\sqrt{9a'^2+16m_b^2}-3a'\right)}{2}};b=2\sqrt{m_b^2-\frac{a'\left(\sqrt{9a'^2+64m_b^2}-3a'\right)}{8}} \quad (11.9)$$

$\{m_a;b'\}$: $$a=2\sqrt{m_a^2-\frac{b'\left(\sqrt{9b'^2+64m_a^2}-3b'\right)}{8}};b=\sqrt{\frac{b'\left(\sqrt{9b'^2+16m_a^2}-3b'\right)}{2}}$$

12. Формули для знаходження катетів a і b прямокутного трикутника за проекцією a' (b') та одним з основних його елементів:

$\{a';\alpha\}$: $a=a'/\sin\alpha$ $\quad b=a'\cos\alpha/\sin^2\alpha$ (12.1)

$\{b';\beta\}$: $a=b'\cos\beta/\sin^2\beta$ $\quad b=b'/\sin\beta$

$\{a';\beta\}$: $a=a'/\cos\beta$ $\quad b=a'\sin\beta/\cos^2\beta$

$\{b';\alpha\}$: $a=b'\sin\alpha/\cos^2\alpha$ $\quad b=b'/\cos\alpha$

$\{a';c\}$: $a=\sqrt{a'\cdot c}$ $\quad b=\sqrt{c^2-a'\cdot c}=\sqrt{(c-a')c}$ (12.2)

$\{b';c\}$: $a=\sqrt{c^2-b'\cdot c}=\sqrt{(c-b')c}$ $\quad b=\sqrt{b'\cdot c}$

$\{a';R\}$: $a=\sqrt{2a'R}$ $\quad b=\sqrt{2(2R-a')R}$ (12.3)

$\{b';R\}$: $a=\sqrt{2(2R-b')R}$ $\quad b=\sqrt{2b'R}$

$\{a';m_c\}$: $a=\sqrt{2a'm_c}$ $\quad b=\sqrt{2(2m_c-a')m_c}$

$\{b';m_c\}$: $a=\sqrt{2(2m_c-b')m_c}$ $\quad b=\sqrt{2b'm_c}$

$\{a';h_c\}$: $a=\sqrt{h_c^2+a'^2}$ $\quad b=\dfrac{h_c}{a'}\sqrt{h_c^2+a'^2}$ (12.4)

$\{b';h_c\}$: $a=\dfrac{h_c}{b'}\sqrt{h_c^2+b'^2}$ $\quad b=\sqrt{h_c^2+b'^2}$

$\{a';m_a\}$: $$a=\sqrt{\frac{a'\left(3a'+\sqrt{9a'^2+64m_a^2}\right)}{8}};\ b=\sqrt{m_a^2-\frac{3a'^2+a'\sqrt{9a'^2+64m_a^2}}{32}} \quad (12.5)$$

$\{b';m_b\}$: $$a=\sqrt{m_b^2-\frac{3b'^2+b'\sqrt{9b'^2+64m_b^2}}{32}};\ b=\sqrt{\frac{b'\left(3b'+\sqrt{9b'^2+64m_b^2}\right)}{8}}$$

$\{a';m_b\}$: $$a=\sqrt{\frac{a'\left(\sqrt{9a'^2+16m_b^2}-3a'\right)}{2}};b=2\sqrt{m_b^2-\frac{a'\left(\sqrt{9a'^2+64m_b^2}-3a'\right)}{8}} \quad (12.6)$$

$\{b';m_a\}$: $$a=2\sqrt{m_a^2-\frac{b'\left(\sqrt{9b'^2+64m_a^2}-3b'\right)}{8}};b=\sqrt{\frac{b'\left(\sqrt{9b'^2+16m_a^2}-3b'\right)}{2}}$$

$\{a';b'\}$: $a=\sqrt{a'(a'+b')}$ $\quad b=\sqrt{b'(a'+b')}$ (12.7)

Зауваження 3. Аналіз дидактичного забезпечення змістової лінії «Розв'язування трикутників» дозволяє констатувати, що пропонується чимало задач, коли відомими елементами трикутника є відрізки, на які розбиває сторону трикутника основа бісектриси, точка дотику вписаного або зовнівписаного кола. Тому акцентуємо увагу на розв'язках наступних задач.

Нехай A_L, B_L, C_L – основи бісектрис прямокутного $\vartriangle ABC$; A_1, B_1, C_1 – точки дотику вписаного кола з його сторонами BC, CA та AB (відповідно); A_2, B_2, C_2 – точки дотику зовнівписаних кіл $\vartriangle ABC$ зі сторонами BC, CA та AB (відповідно) – рис. 2. Тоді мають місце наступні формули для знаходження сторін $\vartriangle ABC$:

1) якщо $AC_L = m$, $C_L B = n$, то:

$$a = n\cdot\frac{m+n}{\sqrt{m^2+n^2}} \qquad b = m\cdot\frac{m+n}{\sqrt{m^2+n^2}} \qquad c = m+n \tag{13.1}$$

2) якщо $CB_L = m$, $B_L A = n$, то:

$$a = m\cdot\sqrt{\frac{m+n}{n-m}} \qquad b = m+n \qquad c = n\cdot\sqrt{\frac{m+n}{n-m}} \tag{13.2}$$

3) якщо $CA_L = m$, $A_L B = n$, то:

$$a = m+n \qquad b = m\cdot\sqrt{\frac{m+n}{n-m}} \qquad c = n\cdot\sqrt{\frac{m+n}{n-m}} \tag{13.3}$$

4) якщо $AC_1 = m$, $C_1 B = n$, то:

$$a = \frac{\sqrt{m^2+6mn+n^2}-m+n}{2} \qquad b = \frac{\sqrt{m^2+6mn+n^2}+m-n}{2} \qquad c = m+n \tag{13.4}$$

5) якщо $CB_1 = m$, $B_1 A = n$, то:

$$a = \frac{2mn}{n-m} \qquad b = m+n \qquad c = \frac{m^2+n^2}{n-m} \tag{13.5}$$

6) якщо $CA_1 = m$, $A_1 B = n$, то:

$$a = m+n \qquad b = \frac{2mn}{n-m} \qquad c = \frac{m^2+n^2}{n-m} \tag{13.6}$$

7) якщо $AC_2 = m$, $C_2 B = n$, то:

$$a = \frac{\sqrt{m^2+6mn+n^2}+m-n}{2} \qquad b = \frac{\sqrt{m^2+6mn+n^2}-m+n}{2} \qquad c = m+n \tag{13.7}$$

8) якщо $CB_2 = m$, $B_2 A = n$, то:

$$a = \frac{2mn}{m-n} \qquad b = m+n \qquad c = \frac{m^2+n^2}{m-n} \tag{13.8}$$

9) якщо $CA_2 = m$, $A_2 B = n$, то:

$$a = m+n \qquad b = \frac{2mn}{m-n} \qquad c = \frac{m^2+n^2}{m-n} \tag{13.9}$$

Зауваження 4. Кожне метричне співвідношення у прямокутному трикутнику є його властивістю, проте не кожне з них є ознакою прямокутного трикутника. Тому, з метою цілісного подання метричних співвідношень та наслідуючи авторів робіт [11, 13], маємо своїм обов’язком навести наступні (зокрема маловідомі) «властивості-ознаки» прямокутного трикутника. А саме:

у трикутнику ABC $\angle C = 90^\circ$ ***тоді і лише тоді, коли виконується одна з наступних умов***

1) $\angle A + \angle B = \angle C$

2) $2m_c = c$

3) $2R = c$

4) $r = p - c$

5) $a^2 + b^2 = c^2$

6) $p(p-c) = (p-a)(p-b)$

7) $2p(p-c) = ab$

8) $2(p-a)(p-b) = ab$

9) $a^2 + b^2 = 4m_c^2$

10) $r_a = p - b \ (r_b = p - a)$

11) $r_c = p$

12) $2S = ab$

13) $m_a^2 + m_b^2 = 5m_c^2$

14) $S = (p-a)(p-b)$

15) $\dfrac{1}{h_a^2} + \dfrac{1}{h_b^2} = \dfrac{1}{h_c^2}$

16) $r_a + r_b = 2R$

17) $\dfrac{2c}{ab} = \dfrac{1}{r_a} + \dfrac{1}{r_b}$

18) $a = h_b \ (b = h_a)$

19) $\begin{cases} h_a \geq a \\ h_b \geq b \end{cases}$

20) $\begin{cases} a = h_a \\ b = h_b \end{cases}$

21) $a + b = h_a + h_b$

22) $R(a + b + 2R) = pc$

23) $a + b + 2R = \dfrac{2pch_c}{ab}$

24) $m_a^2 + m_b^2 = \dfrac{5}{4}c^2$

25) $c(a + b + 2m_c) = 4pm_c$

26) $c(a + b + 2R) = 4pR$

27) $\dfrac{1}{a^2b^2} = \dfrac{1}{b^2c^2} + \dfrac{1}{a^2c^2}$

28) $\sin^2\gamma = \sin^2\alpha + \sin^2\beta$

29) $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{h_c} = \dfrac{1}{r}$

30) $S = p(p-c)$

31) $r \cdot r_c = r_a \cdot r_b$

32) $S = r \cdot r_c \ (S = r_a \cdot r_b)$

33) $R + r = \sqrt{S + R^2}$

34) $\dfrac{\sin\alpha + \sin\beta}{\cos\alpha + \cos\beta} = \sin\gamma$

35) $\mathrm{ctg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{b+c}{a} \ \left(\mathrm{ctg}\dfrac{\beta}{2} = \dfrac{a+c}{b}\right)$

36) $P = 2(2R + r)$

37) $r(a + b + 2R) = 2p(p-c)$

38) $a + b + 2R = \dfrac{2p \cdot AH_C \cdot BH_C}{h_c^2}$

3. Наслідки та прикінцеві зауваження

З урахуванням зауваження 3, умовну таблицю 1 доцільно доповнити й наступними співвідношеннями:

$$AC_L = b\cdot\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a+b} \qquad C_LB = a\cdot\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a+b} \tag{1.13}$$

$$CB_L = a\cdot\frac{b}{a+\sqrt{a^2+b^2}} \qquad B_LA = \sqrt{a^2+b^2}\cdot\frac{b}{a+\sqrt{a^2+b^2}} \tag{1.14}$$

$$CA_L = b\cdot\frac{a}{b+\sqrt{a^2+b^2}} \qquad A_LB = \sqrt{a^2+b^2}\cdot\frac{a}{b+\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$AC_1 = p-a = \frac{-a+b+\sqrt{a^2+b^2}}{2} \qquad C_1B = p-b = \frac{a-b+\sqrt{a^2+b^2}}{2} \tag{1.15}$$

$$CB_1 = p-c = \frac{a+b-\sqrt{a^2+b^2}}{2} \qquad B_1A = p-a = \frac{-a+b+\sqrt{a^2+b^2}}{2} \tag{1.16}$$

$$CA_1 = p-c = \frac{a+b-\sqrt{a^2+b^2}}{2} \qquad A_1B = p-b = \frac{a-b+\sqrt{a^2+b^2}}{2}$$

$$AC_2 = p-b = \frac{a-b+\sqrt{a^2+b^2}}{2} \qquad C_2B = p-a = \frac{-a+b+\sqrt{a^2+b^2}}{2} \tag{1.17}$$

$$CB_2 = p-a = \frac{-a+b+\sqrt{a^2+b^2}}{2} \qquad B_2A = p-c = \frac{a+b-\sqrt{a^2+b^2}}{2} \tag{1.18}$$

$$CA_2 = p-b = \frac{a-b+\sqrt{a^2+b^2}}{2} \qquad A_2B = p-c = \frac{a+b-\sqrt{a^2+b^2}}{2}$$

Розв'язки представлених у статі **66** принципово різних задач про знаходження невідомих катетів прямокутного трикутника дозволяють розв'язати близько **1200** задач на знаходження невідомого елементу прямокутного трикутника за двома (відомими) його елементами, з яких принаймні один є лінійним (з фіксованого набору основних його елементів). *Ідея пропонованого авторами підходу полягає у наступному*:

1) спочатку за допомогою співвідношень (2.1) – (13.9) визначаються катети a і b прямокутного трикутника;

2) потім за допомогою співвідношень $(1.1)-(1.12)-(1.18)$ – невідомий елемент прямокутного трикутника (з фіксованого набору основних його елементів, поповнених відрізками AC_L, C_LB; CB_L, B_LA; CA_L, A_LB; AC_1, C_1B; CB_1, B_1A; CA_1, A_1B; AC_2, C_2B; CB_2, B_2A; CA_2, A_2B).

Маємо своїм обов'язком також відзначити, що хоча пропонований підхід дозволяє (в певному розумінні) звести до мінімуму кількість опорних задач та гарантовано розв'язувати зазначене вище (доволі широке) коло метричних задач, проте він далеко не завжди є раціональним.

DOI: https://doi.org/...

Зміст наведених вище 13 (умовних) таблиць може стати предметом групових та / або індивідуальних завдань для учнів закладів загальної середньої освіти, довгострокових літніх завдань тощо.

Слід також розуміти, що співвідношення (2.1) – (13.9) дають в явному вигляді ознаки рівності прямокутних трикутників, бо зводяться до ознаки їх рівності «за двома катетами».

Крім того, зазначені співвідношення дозволяють одержати цілу низку (в загальному випадку маловідомих) цікавих нерівностей між лінійними елементами прямокутного трикутника. Так, наприклад, зі співвідношення (8.8) маємо, що $r_b > r$, а зі співвідношення (5.5) не важко одержати наступну нерівність

$$2r < h_c \le r\left(\sqrt{2}+1\right).$$

Проте слід мати на увазі, що *рівності* у нестрогих нерівностях для підкореневих виразів коренів парного степеня (у наведених в роботі співвідношеннях) для елементів прямокутного трикутника не завжди досягаються. І тому необхідними є додаткові дослідження щодо строгості / нестрогості знаків відповідних нерівностей. Додатково наведемо й декілька інших нерівностей, справедливість яких не важко встановити у зазначений спосіб:

$2r < a \ \left(2r < b\right)$;

$2r \le \left(\sqrt{2}-1\right)c$;

$1 < \dfrac{c+h_c}{a+b} \le \dfrac{3\sqrt{2}}{4}$;

$l_c \le \dfrac{a+b}{2\sqrt{2}}$;

$2h_c \le c$;

$2l_c \le c$;

$h_c \le l_c < h_c\sqrt{2}$;

$l_a < b\sqrt{2} \ \left(l_b < a\sqrt{2}\right)$.

Оскільки нерівностям між елементами прямокутного трикутника (за винятком тривіальних, зокрема для довжин катета та гіпотенузи) в шкільному курсі геометрії увага майже не приділяється, то автори переконані, що наведений матеріал може частково вирішити й зазначену проблему. А систематизація нерівностей для елементів прямокутного трикутника допоможе майбутнім та молодим вчителям математики, які розробляють власні задачі з числовими даними до теми «Розв’язування прямокутних трикутників».

Більше того, не дивлячись на труднощі, які традиційно виникають під час розв’язування задач в загальному вигляді, автори переконані, що саме вказаний спосіб є природнім для одержання маловідомих нерівностей для елементів трикутника та інших фігур.

Задля зручності та лаконічності подання інформації щодо розв’язності в загальному вигляді задач (на відшукання невідомого катета / невідомих катетів прямокутного трикутника за двома іншими його елементами), розв’язки яких представлено у даній статті, автори вважають за доцільне навести нижче скорочені умови 66 принципово різних таких задач:

1) $\{a;\alpha\}$ ($\{a;\beta\}$);
2) $\{a;c\}$ ($\{a;m_c\}$, $\{a;R\}$);
3) $\{a;h_c\}$;
4) $\{a;S\}$;
5) $\{a;P\}$ ($\{a;r_c\}$);
6) $\{a;r\}$;
7) $\{a;l_c\}$;
8) $\{a;r_a\}$;
9) $\{a;r_b\}$;
10) $\{a;m_a\}$;
11) $\{a;m_b\}$;
12) $\{a;a'\}$;
13) $\{a;b'\}$;
14) $\{a;l_b\}$;
15) $\{\alpha/\beta;c/R/m_c\}$;
16) $\{\alpha;h_c\}$ ($\{\beta;h_c\}$);
17) $\{\alpha;S\}$ ($\{\beta;S\}$);
18) $\{\alpha;P\}$ ($\{\alpha;r_c\}$, $\{\beta;P\}$, $\{\beta;r_c\}$);
19) $\{\alpha;r\}$ ($\{\beta;r\}$);
20) $\{\alpha;l_c\}$ ($\{\beta;l_c\}$);
21) $\{\alpha;r_a\}$ ($\{\beta;r_b\}$);
22) $\{\alpha;r_b\}$ ($\{\beta;r_a\}$);
23) $\{\alpha;m_a\}$ ($\{\beta;m_b\}$);
24) $\{\alpha;m_b\}$ ($\{\beta;m_a\}$);
25) $\{\alpha;a'\}$ ($\{\beta;b'\}$);
26) $\{\alpha;b'\}$ ($\{\beta;a'\}$);
27) $\{\alpha;l_a\}$ ($\{\beta;l_a\}$);
28) $\{\alpha;l_b\}$ $\{\beta;l_b\}$;
29) $\{c/R/m_c;h_c\}$;
30) $\{c/R/m_c;S\}$;
31) $\{c/R/m_c;P\}$ ($\{c/R/m_c;r_c\}$);
32) $\{c/R/m_c;r\}$;
33) $\{c/R/m_c;l_c\}$;
34) $\{c/R/m_c;r_a\}$ ($\{c/R/m_c;r_b\}$);
35) $\{c/R/m_c;m_a\}$ ($\{c/R/m_c;m_b\}$);
36) $\{c/R/m_c;a'\}$ ($\{c/R/m_c;b'\}$);
37) $\{c/R/m_c;l_a\}$ ($\{c/R/m_c;l_b\}$);
38) $\{h_c;S\}$;
39) $\{h_c;P\}$ ($\{h_c;r_c\}$);
40) $\{h_c;r\}$;
41) $\{h_c;l_c\}$;
42) $\{h_c;r_a\}$ ($\{h_c;r_b\}$);
43) $\{h_c;m_a\}$ ($\{h_c;m_b\}$);
44) $\{h_c;a'\}$ ($\{h_c;b'\}$);
45) $\{S;P\}$ ($\{S;r_c\}$);
46) $\{S;r\}$;
47) $\{S;r_a\}$ ($\{S;r_b\}$);
48) $\{S;l_c\}$;
49) $\{S;m_a\}$ ($\{S;m_b\}$);
50) $\{P;r\}$ ($\{r_c;r\}$);
51) $\{P;r_a\}$ ($\{r_c;r_a\}$, $\{P;r_b\}$, $\{r_c;r_b\}$);
52) $\{P;l_c\}$ ($\{r_c;l_c\}$);
53) $\{r;r_a\}$ ($\{r;r_b\}$);
54) $\{r;l_c\}$;
55) $\{l_c;r_a\}$ ($\{l_c;r_b\}$);
56) $\{r_a;r_b\}$;
57) $\{m_a;m_b\}$;
58) $\{m_a;a'\}$ ($\{m_b;b'\}$);
59) $\{m_a;b'\}$ ($\{m_b;a'\}$);
60) $\{a';b'\}$;

61) $\{AC_L;C_LB\}$
62) $\{CB_L;B_LA\}$, $\{CA_L;A_LB\}$;
63) $\{AC_1;C_1B\}$;
64) $\{CB_1;B_1A\}$, $\{CA_1;A_1B\}$;
65) $\{AC_2;C_2B\}$;
66) $\{CB_2;B_2A\}$, $\{CA_2;A_2B\}$.

DOI: https://doi.org/...

Висновки

Автори мають надію, що запропонований матеріал буде цікавим вчителям і викладачам математики та стане корисним студентам і молодим вчителям математики при систематизації та узагальнені метричних співвідношень в прямокутному трикутнику. А запропонований підхід дозволить: вчителям – поширити цей досвід на випадок довільного трикутника; учням – в опануванні практичними навичками при розв'язуванні метричних задач шкільного курсу геометрії.

На думку авторів, важливою та цілком досяжною є розробка цілісного матеріалу щодо нерівностей для елементів прямокутного трикутника.

Не менш цікавим та важливим є подальша робота, пов’язана із пошуком ефективних способів розв’язання 24 задач в загальному вигляді, розв’язування яких (за результатами досліджень-спостережень авторів роботи [12]) призводить до необхідності розв’язувати рівняння третього та четвертого степеня.

Слід також відзначити, що за допомогою метричних співвідношень для трьох-чотирьох елементів прямокутного трикутника досяжними здаються й дослідження щодо зменшення кількості опорних задач, розв’язки 66 з яких наведено в даній статті.

Література

1. Геометрія : підруч. для 8 кл. закладів заг. серед. освіти / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. 2-ге видання, переробл. Х. : Гімназія, **2021**. 208 с.
2. Геометрія : підручник для 8 кл. з поглибленим вивченням математики закладів загальної серед. освіти / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, М.С. Якір. 2-ге видання, перероблене. Х. : Гімназія, **2021**. 224 с.
3. Геометрія : підруч. для 8 кл. закл. загал. серед. освіти / [А. П. Єршова, В. В. Голобородько, О. Ф. Крижановський, С. В. Єршов.]. 2 ге вид., перероб. Харків. : Вид-во «Ранок», **2021**. 256 с.
4. Геометрія : підруч. для 8 кл. закладів заг. серед. освіти / О. С. Істер. 2-ге видання, переробл. К. : Генеза, **2021**. 240 с.
5. Геометрія: підручник для 9 кл. (поглиблене вивчення) / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, М. С. Якір. Х. : Гімназія, **2021**.
6. Геометрія : підручник для 9 класу, 2-ге видання / Г.П. Бевз, Н.Г. Владімірова. К. : Видавничий дім «Освіта», **2022**.
7. Геометрія : підруч. для 9-х класів, 2-ге видання / М.І. Бурда, Н.А. Тарасенкова. К. : УОВЦ «Оріон», **2022**.
8. Геометрія : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. / О. С. Істер. 2-ге видання, переробл. К. : Генеза, **2022**. 239 с.
9. Кушнір І.А. Методи розв'язання задач з геометрії: книжка для вчителя / І.А. Кушнір. К.: АБРИС, **1994**. 235 с.

10. Кушнір І.А., Фінкельштейн Л.П. Геометрія. Школа бойового мистецтва. 7-9 класи. Навчальний посібник. К.: Факт, **2001**. 232 с.
11. Кушнір І.А. Тріумф шкільної геометрії: навч. посібник для 7-11 кл. К.: Наш час, **2005**. 432 с.
12. Кадубовський О.А., Кадубовська О.Л. До питання про формування навичок при систематизації та класифікації метричних задач шкільного курсу геометрії. Проблеми трудової і професійної підготовки: Науково-методичний збірник. **2009**. Вип. 14. С. 46–54.
13. Кадубовський О.А. Ознаки та обернені теореми прямокутного трикутника / О.А. Кадубовський, В.І. Ірза // Дидактика математики: проблеми і дослідження. – Міжнародний збірник наукових робіт. – Донецьк: Вид-во ДонНУ. **2012**. Вип. 38. С. 150–164.
14. Одінцова Є.П., Кадубовський О.А. Про дві обернені задачі на прямокутний трикутник. ІІ Всеукраїнська науково-методична інтернет-конференція студентів, аспірантів та молодих вчених «Розвиток інтелектуальних умінь і творчих здібностей учнів та студентів у процесі навчання дисциплін природничо-математичного циклу «ІТМ*плюс-2021». Форум молодих дослідників». 12 листопада 2021 р. Суми : СумДПУ імені А.С. Макаренка, **2021**. С. 102 – 105. 163 с.

Taras Yu. Hrytsenko, Oleksandr A. Kadubovs'kyi
Donbas State Pedagogical University, Sloviansk, Ukraine

About metric relations in a right triangle and related issues

The article is devoted to systematization and generalization of information about metric relations in a right triangle. For a fixed list of its elements, three most common types of metric problems for finding are considered in detail: 1) elements of a right triangle in its two legs; 2) unknown leg according to the known leg and one of its other elements; 3) legs of a right triangle along its two elements. Attention is paid to the features of solving problems of the third type in general form (without numerical values of quantities). Solutions (in general) 72 of 96 of the fundamentally different above problems are presented in the form of appropriate metric relations, 60 of which can be used to formulate the corresponding little-known signs of equality of right triangles and obtain consequences in the form of inequalities for its elements. Also given are 38 feature properties of a right triangle in the form of corresponding metric relations. The proposed by the authors approach to the systematization and representation of metric relations (in a generalized form and in the form of tables) can effectively solve a much wider range of metric problems to find the unknown element of a right triangle by its other two elements (from the specified list) and generate the corresponding metric relations as consequences from the already given ones.

Keywords: *right triangle, metric relations, signs of equality, properties-signs, school geometry course.*