УДК 517.581, 517.38

Волков С.В.
кандидат фіз.-мат. н., доцент, доцент кафедри вищої математики і фізики, ДВНЗ «ДонНТУ»
e-mail: serhii.volkov@donntu.edu.ua, ORCID 0000-0003-0070-8773

ПРО ОБЧИСЛЕННЯ ОБ’ЄМУ КВАЗІОКТАЕДРІВ

Стаття присвячена знаходженню об’єму геометричних тіл – квазіоктаедрів і наочно демонструє зв’язок всім відомої і зрозумілої кількісної характеристики простору, що займає тіло з, так-званими, спеціальними функціями – функціями, які не виражаються через елементарні та представляються у вигляді рядів або інтегралів. В загальному випадку, отримано формулу обчислення об’єму квазіоетаедрів, який знаходиться через значення $\mathrm{B}-$ бета або $\Gamma-$гамми функції.

Ключові слова: *октаедр, еліпсоїд, параболоїд, об’єм, спеціальна функція, $\Gamma-$гамма функція, $\mathrm{B}-$бета функція, Якобіан, факторіал, інтеграл.*

DOI: https://doi.org/...

Вступ

Квазіоктаедром типу (p,q,s) назвемо тіло, геометричне місце точок (далі – ГМТ) якого задовольняє нерівності виду (1)

$$\left(\frac{|x|}{a}\right)^p+\left(\frac{|y|}{b}\right)^q+\left(\frac{|z|}{c}\right)^s\le 1, \tag{1}$$

де параметри p,q,s,a,b,c є дійсними додатніми значеннями, $a,b,c-$ в (1) називатимемо піввісями, для яких справедливі умови: $|x|<a, |y|<b, |z|<c$.

Неважко бачити, що з деякими $(p,q,s)-$ типами квазіоктаедрів, тілами, ГМТ яких задано (1), ми знайомі. Нам відомі їх форми, властивості, формули обчислення об’ємів та багато інших характеристик. Так, наприклад, квазіоктаедр типу $(1,1,1)$ є «звичайним» октаедром [1] (многогранник з вісьмома гранями) див. далі Рис. 1., квазіоктаедр типу $(2,2,2)$ є еліпсоїдом [5], див. далі Рис. 2., а квазіоктаедр типу $(2,2,1)$ є еліптичним параболоїдом [5], більш того, квазіоктаедр типу $(2,2,\infty)$ є циліндром Рис. 3. ГМТ зазначених вище тіл задовольняють відповідним нерівностям (2), (3), (4), (5).

$$\frac{|x|}{a}+\frac{|y|}{b}+\frac{|z|}{c}\le 1, \tag{2}$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1, \tag{3}$$

$$|z|\le c\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right), \tag{4}$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1,\quad |z|\le c. \tag{5}$$

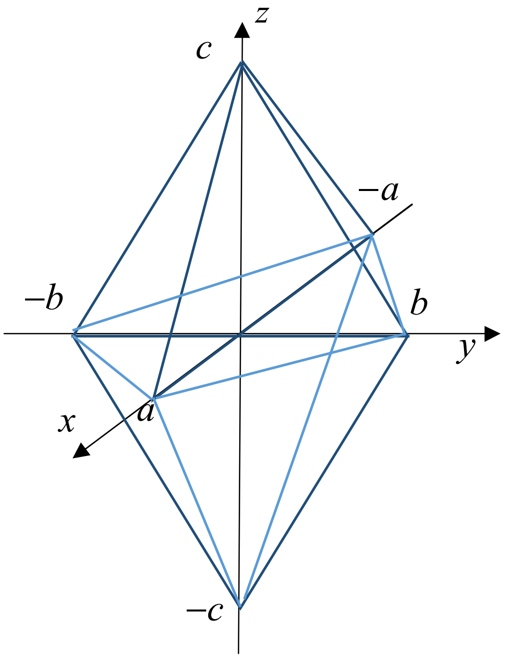

Рис. 1: Октаедр

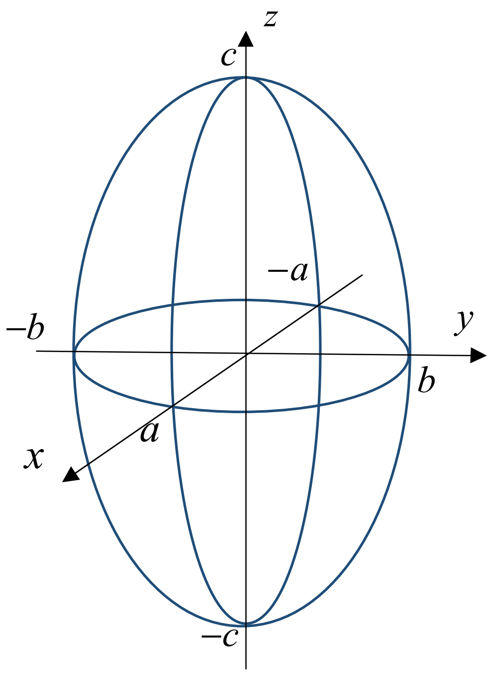

Рис. 2: Еліпсоїд

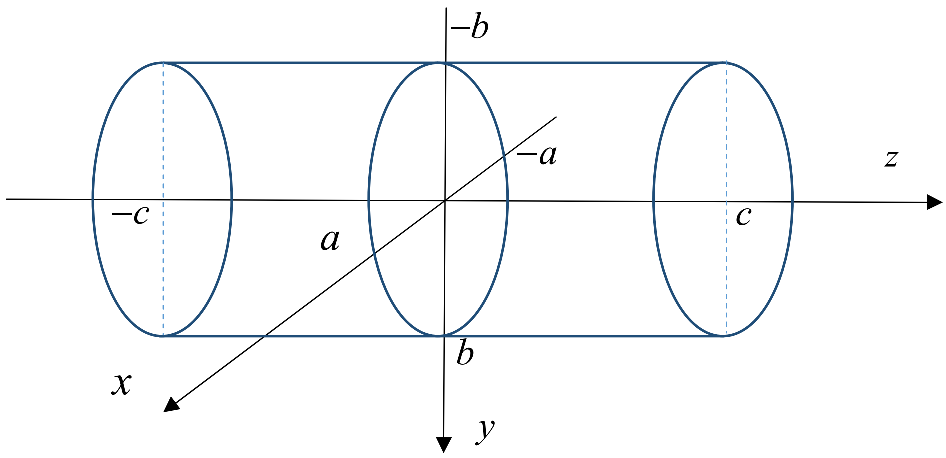

Рис. 3: Циліндр

У діючому підручнику [1] в теоремі 15.1 (див. ст. 129-130) доведено, що для будь-якої піраміди заданої висоти H та відомою площею основи $S_{осн}$ об'єм обчислюють за формулою $V=\frac{1}{3}S_{осн}\cdot H$. Враховуючи те, що в основі піраміди ромб, оскільки діагоналі перетинаються під прямим кутом та діляться навпіл, отримаємо об'єм квазіоктаедру типу $(1,1,1)$
$V=\frac{2}{3}\frac{1}{2}d_1d_2H=\frac{1}{3}2a2bc$

$$V = \frac{4}{3}abc\,. \tag{6}$$

У підручнику [1] також зазначено (див. ст. 139), що об'єм циліндра можна обчислити за формулами $V = S_o H$, що в позначеннях (5) та Рис. 3

$$V = 2\pi abc\,, \tag{7}$$

або у випадку коли основою циліндру є коло $a = b = R$, висота $H = 2c$

$$V = \pi R^2 H\,. \tag{8}$$

Обчислення об'єму для квазіоктаедру типу $(2,2,2)$ є, умовно кажучи, класичною – стандартною задачею математичного аналізу на застосування інтегралів [2-4], [7,8] (в т.ч. подвійного або потрійного) з розв'язків якої відомо, що відповідний об'єм, знаючи величини півосей еліпсоїда, можна знайти:

$$V = \frac{4}{3}\pi abc\,. \tag{9}$$

Метою цієї статті є встановлення та демонстрація зв'язку значення об'єму тіла відповідної форми з значенням Гамма та Бета-функцій (в позначеннях Γ, B). Необхідність у їх використанні виникає, наприклад, при розв'язанні диференціальних та функціональних рівнянь, обчисленні інтегралів, ймовірностей та розподілів в статистиці. Γ та B функції є представниками так-званих спеціальних функцій, функцій які є потужним інструментом для вивчення складних математичних та фізичних явищ і мають широкий спектр можливих застосувань в різних галузях математики, фізики, інженерії та інших областях науки.

Основна частина

Нехай задано квазіоктаедр типу (p,q,s). Для знаходження його об'єму скористаємося формулою (10), як одним з можливих варіантів:

$$V = V(p,q,s) = \iiint_T dV = \iiint_T dxdydz\,. \tag{10}$$

Для обчислення (10), модифікуємо тіло інтегрування T. Квазіоктаедр взаємно однозначно відобразимо в циліндричне тіло T_1 за допомогою неперервно диференційованих функцій:

$$\begin{cases} x = x(r,\varphi,z) = a(r\cos\varphi)^{\frac{2}{p}}; \\ y = y(r,\varphi,z) = b(r\sin\varphi)^{\frac{2}{q}}; \\ z = z(r,\varphi,z) = cz. \end{cases} \tag{11}$$

Тоді (10), з урахуванням (11) будемо знаходити за формулою

$$V = \iiint_T dV = \iiint_{T_1} \left|J(r,\varphi,z)\right| drd\varphi dz\,, \tag{12}$$

де $J(r,\varphi,z)-$Якобіан, який не дорівнює нулю в T_1.

$$J(r,\varphi,z)=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial z}\\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial z}\\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial z}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a\frac{2}{p}r^{\frac{2}{p}-1}\cos^{\frac{2}{p}}\varphi & ar^{\frac{2}{p}}\frac{2}{p}\cos^{\frac{2}{p}-1}\varphi(-\sin\varphi) & 0\\ b\frac{2}{q}r^{\frac{2}{q}-1}\sin^{\frac{2}{q}}\varphi & br^{\frac{2}{q}}\frac{2}{q}\sin^{\frac{2}{q}-1}\varphi(\cos\varphi) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow J(r,\varphi,z)=ab\frac{2}{p}\frac{2}{q}r^{\frac{2}{p}-1}\cdot r^{\frac{2}{q}-1}\cdot\cos^{\frac{2}{p}-1}\varphi\cdot\sin^{\frac{2}{q}-1}\varphi\begin{vmatrix}\cos\varphi & -r\sin\varphi\\ \sin\varphi & r\cos\varphi\end{vmatrix}\Rightarrow$$

$$J(r,\varphi,z)=4\frac{ab}{pq}r^{\frac{2}{p}+\frac{2}{q}-1}\cdot\cos^{\frac{2}{p}-1}\varphi\cdot\sin^{\frac{2}{q}-1}\varphi \qquad (13)$$

У свою чергу, з огляду на (11) рівняння ГМТ поверхні квазіоктаедру (1) отримаємо у вигляді

$$|z|=\sqrt[s]{1-r^2}\,. \qquad (14)$$

Отже, з урахуванням (13) та (14), а також симетрії квазіоктаедрів будь-якого $(p,q,s)-$типу відносно координатних осей, об'єм (12) знайдемо

$$V=2\cdot 4\cdot\frac{abc}{pq}\cdot 4\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{\frac{2}{p}-1}\varphi\cdot\sin^{\frac{2}{q}-1}\varphi d\varphi\cdot\int_0^1 r^{\frac{2}{p}+\frac{2}{q}-1}\left(1-r^2\right)^{\frac{1}{s}}dr=8\frac{abc}{pq}I_1\cdot I_2\,,$$

де $I_2=2\cdot\int_0^1 r^{\frac{2}{p}+\frac{2}{q}-1}\left(1-r^2\right)^{\frac{1}{s}}dr$;

$I_1=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{\frac{2}{p}-1}\varphi\cdot\sin^{\frac{2}{q}-1}\varphi d\varphi-$ інтеграл Ейлера I-го роду.

Тобто I_1 є так званою $\mathrm{B}-$ функцію, або функцію Ейлера,

$$I_1=B\left(\frac{1}{p},\frac{1}{q}\right). \qquad (15)$$

Для інтеграла I_2 виконаємо заміну змінних $t=r^2\left[r\in(0,1)\to t\in(0,1)\right]\Rightarrow$ $\Rightarrow r=t^{\frac{1}{2}}\Rightarrow dr=\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}dt\Rightarrow I_2=\int_0^1 t^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-1}(1-t)^{\frac{1}{s}+1-1}dt$. В такому вигляді, I_2 є альтернативним записом для $\mathrm{B}-$ функції відповідних аргументів,

$$I_2=B\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q};\frac{1}{s}+1\right). \qquad (16)$$

Зважаючи на (15) та (16) об'єм квазіоктаедрів довільного $(p,q,s)-$ типу знайдемо за формулою

$$V(p,q,s)=8\frac{abc}{pq}B\left(\frac{1}{p},\frac{1}{q}\right)\cdot B\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q};\frac{1}{s}+1\right) \tag{17}$$

Визначення, властивості та більше детальної інформації про $B-$бета і $\Gamma-$гамму функції можна знайти, як приклад, в роботах [6], [9-13].

Відомо, що одним із способів узагальнення факторіалу (добутку натуральних чисел) на множині дійсних та комплексних чисел є $\Gamma-$гамма функція, яка визначається через збіжний невласний інтеграл

$$\Gamma(z)=\int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt\,. \tag{18}$$

Встановлено, якщо $\operatorname{Re} z>0$, то інтеграл (18) є абсолютно збіжним. При цьому інтеграл (18) називають інтегралом Ейлера другого роду. Між інтегралами Ейлера першого та другого роду, тобто між Бета і Гамма функцією існує зв'язок, що виражається співвідношенням

$$B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}\,. \tag{19}$$

Відповідно до (17) та з огляду на (19) і те, що $\Gamma(z+1)=z\cdot\Gamma(z)$, має місце

Твердження. Об'єм квазіоктаедрів (1) типу (p,q,s) можна обчислити за формулою

$$V=V(p,q,s)=8\frac{abc}{pqs}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)\Gamma\left(\frac{1}{q}\right)\Gamma\left(\frac{1}{s}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{s}+1\right)}\,. \tag{20}$$

Маємо змогу переконатися, що об'єм (6) октаедру (2), тобто квазіоктаедру типу $(1,1,1)$, враховуючи отриманий результат (20), є частинним його значенням.

Нехай в (1) $p=q=s=1$ тобто $\frac{|x|}{a}+\frac{|y|}{b}+\frac{|z|}{c}\le 1-$ визначено октаедр, тоді знаючи, що $\Gamma(n)=(n-1)!$ $(\forall n=1,2,3...)$ з (20) отримаємо

$$V(1,1,1)=8abc\frac{\Gamma^3(1)}{\Gamma(4)}=8abc\frac{1}{6}=\frac{4}{3}abc\,,$$

що очевидно відповідає зазначеному в (6).

DOI: https://doi.org/...

Аналогічно для еліпсоїду (3) – квазіоктаедру типу $(2,2,2)$ обчислимо об’єм за (20). Якщо $p=q=s=2 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1$, то з огляду на відоме значення $\Gamma-$гамма функції $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$, та рекурентне співвідношення

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-3)\cdot(2n-1)\frac{\sqrt{\pi}}{2^n},$$

отримаємо

$$V(2,2,2)=8\frac{abc}{2\cdot 2\cdot 2}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+1\right)}=abc\frac{\Gamma^3\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(2+\frac{1}{2}\right)}=abc\frac{\left(\sqrt{\pi}\right)^3}{1\cdot 3\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2^2}}=\frac{4}{3}\pi abc,$$

що співпадає з (9).

Неважко з (20) отримати значення об’єму для еліптичного параболоїду (4), так названого квазіоктаедру типу $(2,2,1)$

$$V(2,2,1)=8\frac{abc}{2\cdot 2\cdot 1}\frac{\Gamma(0,5)\Gamma(0,5)\Gamma(1)}{\Gamma(0,5+0,5+1+1)}=2abc\frac{\sqrt{\pi}\cdot\sqrt{\pi}\cdot 1}{\Gamma(3)}=\pi abc.$$

Всім відомі формули об’єму циліндру (7) та (8) також є частинним випадком (20). Циліндр – в термінах даної роботи є квазіоктаедром типу $(2,2,\infty)$, тобто при $p=q=2$ та $s\to\infty$ з (20)

$$V(2,2,\infty)=8\frac{abc}{2\cdot 2}\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right)\lim_{s\to\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{s}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{s}+1\right)}=2abc\cdot\pi\lim_{s\to\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{s}+1\right)}{\Gamma\left(1+\left(\frac{1}{s}+1\right)\right)},$$

звідки з урахуванням, вже використаної раніше властивості $\Gamma(z+1)=z\cdot\Gamma(z)$

$$V(2,2,\infty)=2abc\cdot\pi\lim_{s\to\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{s}+1\right)}{\left(\frac{1}{s}+1\right)\Gamma\left(\frac{1}{s}+1\right)}=2\pi abc.$$

Очевидно, останнє є тотожнім до зазначених значень об’ємів (7) і (8).

Звісно, з (20) варіюючи (p,q,s) типами квазіоктаедру можна записати іще деяку кількість відомих, або і не дуже, результатів для знаходження об’ємів «стандартних=класичних» тіл. В цьому відношенні автор залишає поле для творчості усім зацікавленим.

Зважаючи на (20) і те, що Гамма функція приймає цілі додатні значення лише при цілому значенні аргументу, можна сформулювати наступне.

Твердження. Об'єм квазіоктаедрів (1) типу (p,q,s) є раціональним значенням, тоді і тільки тоді, коли $p=\frac{1}{m}, q=\frac{1}{n}, s=\frac{1}{k}$ де $m,n,k\in\mathbb{N}$ і знаходиться за формулою

$$V=V\left(\frac{1}{m},\frac{1}{n},\frac{1}{k}\right)=8abc\frac{m!n!k!}{(m+n+k)!}. \qquad (21)$$

Висновки

Таким чином, в даній статті отримані умови, за яких значення об'єму квазіоктаедрів є раціональним. Слід також зауважити, що у представленій роботі встановлені формули обчислення об'єму квазіоктаедрів узагальнюють відомі всім результати, що можуть бути отримані з (17) або (20), при фіксації відповідного $(p,q,s)-$ типу заданого квазіоктаедру. Відповідні формули, також, наочно демонструють та повністю описують залежність об'єму тіла від значення $\mathrm{B}-$бета або $\Gamma-$гамма функції.

Література

1. Геометрія: проф. рівень : підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський та ін. Х. : Гімназія, 2019. 204 с.
2. Давиглядов Н. А. Курс математического анализа. Ч. 2. Функции многих переменных и дифференциальные уравнения / Н. А. Давиглядов. К.: Вища шк., 1978. 392 с.
3. Дороговцев А.Я. Математический анализ. Краткий курс в современном изложении. К.: Факт, 2004. 560 с.
4. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навчальний посібник. К.: А.С.К., 2006. 648 с.
5. Клепко В. Ю., Голець В. Л. Вища математика в прикладах і задачах: Навчальний посібник. 2-ге видання. К.: Центр учбової літератури, 2009. 594 с
6. Славянов С. Ю., Лай В. Специальные функции: Единая теория, основанная на анализе особенностей / Пер. с англ. А. Я. Казакова, предисл. А. Зеегер. СПб.: Невский диалект, 2002. 312 с.
7. Ляшко И.И., Боярчук А.К., Гай Я.Г. и др. Справочное пособие по математическому анализу. Часть 2. Ряды, функции нескольких переменных, кратные и криволинейные интегралы. К.: Вища школа. 1979. 736 с.
8. Шкіль М. І. Математичний аналіз : підручник у 2 ч. К: Вища шк., 2005. Ч. 2. 510 с.

DOI: https://doi.org/...

9. Abramowitz, Milton, Stegun, Irene A. Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables. Chapter 6. «Gamma Function and Related Functions», Dover Publications, New York, USA, (1915-1958) 1972. – 1076 p. ark:/13960/t1jh4p348
10. Andrews G.E., Askey R., Roy R. Special Functions. Cambridge, Cambridge University Press, 1999. 684 p. doi:10.1017/CBO9781107325937
11. Davis P. J. Leonhard Euler's Integral: A Historical Profile of the Gamma Function / P. J. Davis // American Mathematical Monthly. 1959. Vol. 66 №10: P 849–869. doi:10.2307/2309786
12. Deming W.E. The Gamma and Beta Functions: Notes and Problems Designed for Use in Mathematical Statistics and Mathematical Physics / William Edwards Deming. Department of Agriculture Washington. 1944. 37 p.
13. Emil Artin. The Gamma Function // translated by Michael Butler, USA. 1964. The German original «Einfiihrung in die Theorie der Gammafunktion» appeared in the Hamburger Mathematische Einzelschriften l. Heft. // published by Verlag B. G. Teubner, Leipzig. 1931. 39 p.

Serhii V. Volkov
Donetsk National Technical University, Lutsk, Ukraine

On calculating the volume of quasi-octahedrons

The article is devoted to finding the volume geometric shapes quasi-octahedrals and clearly demonstrates the connection of a well-known and understandable characteristic of a body with the so-called special functions - functions that are not expressed through elementary functions and are represented as series or integrals. In general, a formula for calculating the volume of quasi-ahedra, which is found through the value of beta or gamma of the function, is obtained.

Keywords: *octahedron, ellipsoid, paraboloid, volume, special function, gamma function, beta function, Jacobian, factorial, integral.*