УДК 517.928

Самусенко П.Ф., Даниліна Г.В., Рашевський М.О.

[1] *доктор фізико-математичних наук, професор, НТУУ (КПІ)*
e-mail: psamusenko@ukr.net, ORCID 0000-0002-4241-6173
[2] *кандидат технічних наук, доцент, КФК НАУ*
e-mail: danilina@ukr.net, ORCID 0009-0007-3634-7734
[3] *кандидат фізико-математичних наук, доцент, КФК НАУ*
e-mail: rashevskyi@g-suit.kk.nau.edu.ua, ORCID 0000-0003-1136-2691

ПРО АСИМПТОТИЧНЕ ІНТЕГРУВАННЯ ЛІНІЙНИХ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ВІДХИЛЕННЯМ АРГУМЕНТУ

Побудовано асимптотичне зображення розв'язку для основної початкової задачі системи лінійних сингулярно збурених диференціально-різницевих рівнянь. Інтегрування таких систем рівнянь із нестабільним спектром розпочато у працях М. І. Шкіля та його учнів. У цьому дослідженні побудовано асимптотичне зображення розв’язку системи диференціально-різницевих рівнянь із нестабільностями у спектрі головної матриці. Досліджено також нестабільність, характерна лише для рівнянь з відхиленням аргументу. Дано асимптотичні оцінки похибки.

Ключові слова: *точка повороту, сингулярне збурення, асимптотичний розв'язок, диференціально-різницеве рівняння*

DOI: https://doi.org/...

Вступ

Постановка проблеми. Асимптотичне зображення розв'язку системи вигляду

$$\frac{dx(\tau)}{dt} = A(\tau)x + B(\tau)x(\tau - \Delta)$$

побудовано у працях [6; 9], де розв’язано основну початкову задачу при різних припущеннях про спектр матриці $A(\tau)$. Записана система диференціально-різницевих рівнянь є окремим випадком системи

$$B(\tau)\frac{dx(\tau,\varepsilon)}{dt} = A(\tau)x(\tau,\varepsilon) + C(\tau)x(\tau - \Delta,\varepsilon),$$

асимптотичне зображення розв'язку якої побудовано [9] у припущенні стабільності спектру граничної в’язки матриць [6]. Диференціальні рівняння з відхиленням аргументу інтегруються поєднанням методу кроків з асимптотичними методами. Основним обмеженням, що накладалося на спектр головної матриці системи, була його стабільність. У цьому дослідженні розглянемо систему рівнянь:

$$\frac{dx(\tau,\varepsilon)}{dt} = A(\tau,\varepsilon)x + B(\tau,\varepsilon)x(\tau - \Delta,\varepsilon) \tag{1}$$

де $\boldsymbol{x}(\tau, \varepsilon)$ – шуканий n-вимірний вектор, $A(\tau, \varepsilon)$ та $B(\tau, \varepsilon)$ – $n\times n$-матриці, що зображується збіжними рядами за степенями дійсного малого параметра $\varepsilon > 0$:

$$A(\tau,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k A_k(\tau);\ B(\tau,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k B_k(\tau),$$

$\Delta > 0$ – стале відхилення аргументу. Для системи (1) ставиться основна початкова задача побудувати на півінтервалі $0 < \tau = \varepsilon t \le L < +\infty$ її розв'язок, який би при $-\Delta \le \tau \le 0$ задовольняв умову

$$x(\tau, \varepsilon) = \varphi(\tau, \varepsilon); \qquad (2)$$

$\varphi(\tau,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \varphi_k(\tau)$. В описаній постановці маємо основну початкову задачу.

Метою статті є побудова асимптотичного розв'язку основної початкової задачі для системи диференціально-різницевих рівнянь (1) у випадку нестабільного спектру головної матриці системи.

Основна частина

У працях [6; 9] вимагалося виконання таких умов.

1^0. Матриці $A_k(\tau)$ та $B_k(\tau)$ та вектори $\varphi_k(\tau)$ мають $m + 1 - k$ неперервну похідну відповідно на відрізках $[0, L]$ та $[-\Delta; 0]$; $m > 1$ – натуральне число.

2^0. Корені характеристичного рівняння $P(\lambda, t, 0) = 0$ задовольняють таким умовам:

1) для будь-якого $\tau \in [0, L]$ та $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$

$$\lambda_k(\tau) \ne 0; \qquad (3)$$

2) дійсні частини коренів для всіх $\tau \in [0, L]$ не додатні, тобто $\operatorname{Re} \lambda_k(\tau) \le 0$;

3) для будь-яких $\tau_1 < \tau_2$, $\tau_1, \tau_2 \in [0, L]$

$$\lambda_k(\tau_1) \ne \lambda_p(\tau_2);\ k, p \in \{1, 2, \ldots, n\}. \qquad (4)$$

Тут поліном $P(\lambda, t, \varepsilon) \equiv \det(A(t, \varepsilon) - \lambda E)$, E – одинична матриця. Ізольовані точки досліджуваного проміжку, де збігаються принаймні два корені характеристичного полінома, називаються точками повороту (ТП), інколи вживають термін «точка звороту» [4]. Якщо в ізольованих точках порушується умова (3), то говорять, що спектр матриці є нестабільним [5]. Нестабільність спектру призводить до необмеженості розв'язку системи при $\varepsilon \to 0$, як доведено в [5]. Ряд прикладних задач призводить до необхідності досліджувати системи рівнянь із ТП [5; 10]. Основним і найбільш розвиненим методом інтегрування звичайних диференціальних рівнянь є метод багатьох масштабів [3; 7; 8; 10]. Проте для рівнянь з відхиленням аргументу він є досить незручним, оскільки необхідно громіздкий у запису розв'язок використовувати на кожному кроці інтегрування. Тому запис асимптотичного розв'язку, який не потребує досить складної процедури «зрощування» різних зображень є актуальним у досліджуваному питанні.

Інший клас рівнянь, а саме – рівняння з малим запізненням аргументу:

$$\varepsilon\frac{dy}{dx}-\left(A_0(x)+\varepsilon A_1(x)\right)y(x,\varepsilon)+\left(B_0(x)+\varepsilon B_1(x)\right)y(x(1-\varepsilon^2\Delta),\varepsilon),$$

де вироджуваність матриці $A_0(x)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ x & 0\end{pmatrix}$ в початку координат призводить до наявності там точки повороту, розв'язано в [4]. Остання система має мале відхилення аргументу, тому запропонований там метод побудови розв'язку не може бути застосованим до системи (1). Навпаки, метод, запропонований для системи (1) для малого відхилення аргументу не є ефективним. Остання система вивчена у працях А. М. Самойленка, Г. В. Завізіона, І. Г. Ключник.

Теоретичні основи дослідження.

Згідно з методом побудови [6] матриці $U_{m,1}(\tau,\varepsilon), U_{m,2}(\tau,\varepsilon),\ldots$ визначаються як розв'язки однієї й тієї ж системи рівнянь, записаної на відповідних кроках інтегрування, і фактично є зображенням на згаданих кроках матриці $U_m(\tau,\varepsilon)$, що разом із експонентою утворює фундаментальну матрицю системи без відхилення аргументу. Такі міркування вказують на можливість зведення системи з відхиленням аргументу до системи, що з деякою точність не містить доданків без відхилення аргументу. Для випадку стабільного спектру таке зведення було виконана у працях М.І. Шкіля та Ю.П. Підченка. Подібне перетворення побудуємо для системи (1) із ТП.

Згідно з [6; 9] будуватимемо розв'язок системи (1) методом кроків. На першому кроці система (1) з урахуванням (2) запишеться так:

$$\frac{dx(\tau,\varepsilon)}{dt}=A(\tau,\varepsilon)x+B(\tau,\varepsilon)\varphi(\tau-\Delta,\varepsilon).$$

Це неоднорідна система звичайних диференціальних рівнянь, асимптотичні розв'язки якої побудовано у різних припущеннях про спектр головної матриці. Підстановкою

$$x(\tau,\varepsilon)=U_{m,1}(\tau,\varepsilon)z(\tau,\varepsilon)+p_{m,1}(\tau,\varepsilon),$$

де $U_{m,1}(\tau,\varepsilon)=\sum_{s=0}^{m}\varepsilon^s U_1^{(s)}(\tau)$, $p_{m,1}(\tau,\varepsilon)=\sum_{s=0}^{m}\varepsilon^s p_1^{(s)}(\tau)$, дістанемо систему рівнянь

$$\varepsilon U_{m,1}(\tau,\varepsilon)\frac{dz(\tau,\varepsilon)}{d\tau}=\left(A(\tau,\varepsilon)U_{m1}(\tau,\varepsilon)-\varepsilon\dot U_{m1}(\tau,\varepsilon)\right)z+A(\tau,\varepsilon)p_{m1}(\tau,\varepsilon)+B(\tau,\varepsilon)\varphi(\tau-\Delta,\varepsilon).$$

Тут і далі точкою згори позначено диференціювання по змінній τ. Невідомі матриці та вектори будуватимемо так, щоб справджувалися такі тотожності:

$$A(\tau,\varepsilon)U_{m,1}(\tau,\varepsilon)-\varepsilon\dot U_{m,1}(\tau,\varepsilon)=U_{m,1}(\tau,\varepsilon)\left(\Lambda(\tau,\varepsilon)+\varepsilon^{m+1}C_{m,1}(\tau,\varepsilon)\right);$$

$$A(\tau,\varepsilon)p_{m,1}(\tau,\varepsilon)-\varepsilon\dot p_{m,1}(\tau,\varepsilon)+B(\tau,\varepsilon)\varphi(\tau-\Delta,\varepsilon)=\varepsilon^{m+1}q_{m,1}(\tau,\varepsilon).$$

Невідомі матриці та вектори знайдемо описаним у [5] методом, прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях малого параметра. Матимемо таку систему матричних рівнянь:

$$\begin{cases} A_0(\tau)U_1^{(0)}(\tau,\varepsilon) - U_1^{(0)}\Lambda_0(\tau) = 0; \\ A_0(\tau)U_1^{(s)}(\tau,\varepsilon) - U_1^{(s)}\Lambda_0(\tau) = F_s(\tau,\varepsilon),\ s = 1, 2, ..., m; \\ A_0(\tau)p_1^{(0)}(\tau) + B_0(\tau)\varphi(\tau-\Delta,0) = 0; \\ \left(A(\tau,\varepsilon)U_{m1}(\tau,\varepsilon) - \varepsilon\dot{U}_{m1}(\tau,\varepsilon)\right)z + A(\tau,\varepsilon)p_1^{(s)}(\tau,\varepsilon) + B(\tau,\varepsilon)\varphi(\tau-\Delta,\varepsilon). \end{cases} \tag{5}$$

Якщо корені характеристичного рівняння є простими і виконано умови (3) і (4), то існує неособлива матриця $T(\tau)$

$$T^{-1}(\tau)A_0(\tau)T(\tau) = \Lambda(\tau) = diag\{\lambda_1(\tau), \lambda_2(\tau), ..., \lambda_2(\tau)\}, \tag{6}$$

звідки видно, що розв’язком першого рівняння системи (5) є $U_1^{(0)}(\tau) = T(\tau)$, а елементи першої і подальших матриць $U_1^{(s)}(\tau)$ будуть розв’язками рівнянь вигляду

$$u_{1,ij}^{(s)}(\tau) = \frac{f_{ij}^{(s)}(\tau)}{\lambda_i(\tau) - \lambda_j(\tau)},\ i \neq j;\ p_1^{(s)}(\tau) = -A_0^{-1}(\tau)B_0(\tau)\varphi_0(\tau).$$

Таким чином, система рівнянь матиме неперервні розв'язки, якщо виконано згадану вище умову 3). При порушенні умови 3) говорять про нестабільність спектру головної матриці системи, у цьому випадку компоненти шуканого вектора будуть розривними. Якщо порушено умову (4) для ізольованого значення τ_1 так що $\lambda_k(\tau_1) = \lambda_p(\tau_1)$; $k \neq p$, то говорять про наявність точки повороту.

При описаному способі побудови виникає нестабільність спектру, яка характерна лише для диференціально-різницевих рівнянь, а саме:

$$\lambda_i(\tau_1 - k\Delta) = \lambda_j(\tau_1). \tag{7}$$

Якщо формально покласти $\Delta = 0$, то матимемо класичне означення ТП. Цей випадок розглядається у статті, а також ще одна нестабільність, яка призводить до запису розв'язку у вигляді кратних інтегралів.

1. Нестабільність, пов’язана із відхиленням аргументу.

У припущенні, що виконано умови (3) і (4) на першому кроці $[0; \Delta]$ розв'язок системи (1) має вигляд

$$x(\tau,\varepsilon) = T(\tau)\left[U_{m,1}(\tau,\varepsilon)\exp\left\{\varepsilon^{-1}\int_0^\tau \Lambda_{m,1}(s,\varepsilon)ds\right\}c_1 + p_{m,1}(\tau,\varepsilon)\right] + \varepsilon^m\alpha_{m,1}(t,\varepsilon),$$

де вектори і матриці, визначено описаним способом, як в [6]. На другому кроці ($\Delta \leq \tau \leq 2\Delta$) система (1) запишеться так:

$$\varepsilon\frac{dx}{d\tau} = A(\tau,\varepsilon)x(\tau,\varepsilon) + B(\tau,\varepsilon)\exp\left\{\varepsilon^{-1}\int_0^{\tau-\Delta} \Lambda_{m,1}(s,\varepsilon)ds\right\}c_1 + f_2(\tau,\varepsilon) + \varepsilon^m\alpha_{m,1}(\tau,\varepsilon). \tag{8}$$

Припустимо, що на другому кроці умову 3) порушено, а саме: існує ізольована точка $\tau_0 \in [\Delta; 2\Delta]$ така, що для деяких i, j виконується рівність $\lambda_i(\tau_0 - \Delta) = \lambda_j(\tau_0)$. Згідно з [5] розв’язок системи (6) шукатимемо у вигляді

$$x_m(\tau,\varepsilon) = T(\tau)\left[U_{m,2}(\tau,\varepsilon)\exp\left\{\varepsilon^{-1}\int_{\Delta}^{\tau}\Lambda_{m,2}(s,\varepsilon)ds\right\}c_2 + p_{m,2}(\tau,\varepsilon)\right] + R_{m,1}(\tau,\varepsilon)\times$$
$$\times\exp\left\{\varepsilon^{-1}\int_{0}^{\tau-\Delta}\Lambda_{m,1}(s,\varepsilon)ds\right\}c_1 + \varepsilon^m\alpha_{m,2}(\tau,\varepsilon). \tag{9}$$

Всі невідомі матриці, за винятком $R_{m,1}(\tau, \varepsilon)$, визначається, як описано у [6]. При визначенні згаданої матриці умова 3) є істотною, оскільки $R_{m,1}(\tau, \varepsilon)$ визначається із такої тотожності:

$$\left(\Lambda_0(\tau) + \varepsilon A_1(\tau) + \ldots\right)R_{m,1}(\tau,\varepsilon) - R_{m,1}(\tau,\varepsilon)\left(\Lambda_0(\tau-\Delta) + \varepsilon\Lambda_1(\tau-\Delta) + \ldots\right) - \varepsilon R'_{m,1}(\tau,\varepsilon) =$$
$$= F(\tau,\varepsilon).$$

Побудувавши шукану матрицю у вигляді $R_{m,1}(\tau,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{m-1}\varepsilon^k R_{m,1}^{(k)}(\tau,\varepsilon)$ методом [6], дістанемо: $R_{m,1}^{(0)}(\tau,\varepsilon) \equiv E$. Для елементів $R_{m,1}^{(1)}(t,\varepsilon)$ матимемо рівності $r_{ij}^{(1)}(\tau) = \dfrac{f_{ij}(\tau)}{\lambda_i(\tau) - \lambda_j(\tau-\Delta)}$, і, як наслідок, отримаємо матриці із розривними елементами. Отже, система рівнянь, що отримується із тотожності прирівнюванням коефіцієнтів при степенях ε, не розв’язується описаним методом. Використаємо метод В. Вазова [10] для інтегрування майже діагональних систем із точками повороту. Іншу версію цього методу для інтегрування систем із слабкою нелінійністю використано в [1]. Прирівнюючи коефіцієнти при степенях ε, вважаємо доданок $\varepsilon\dot{R}_{m,1}(t,\varepsilon)$ вільним членом.

Отже, матимемо таку систему матричних рівнянь:

$$\Lambda_0(\tau)R_{m,1}^{(0)}(\tau,\varepsilon) - R_{m,1}^{(0)}(\tau,\varepsilon)\Lambda_0(\tau) = \varepsilon\dot{R}_{m,1}^{(0)}(\tau,\varepsilon);$$
$$\Lambda_0(\tau)R_{m,1}^{(k)}(\tau,\varepsilon) - R_{m,1}^{(k)}(\tau,\varepsilon)\Lambda_0(\tau) = \varepsilon\dot{R}_{m,1}^{(k)}(\tau,\varepsilon) + F_k(t, R_{m,1}^{(k-1)}, \varepsilon),\ k = 1, 2,\ldots, m-1;$$

На відміну від системи (5), елементи $r_{ij}^{(k)}(\tau)$ визначатимуться не з алгебричних, а з диференціальних рівнянь вигляду:

$$\frac{dr_{ij}^{(k)}(\tau,\varepsilon)}{dt} = (\lambda_i(\tau) - \lambda_j(\tau-\Delta))r_{ij}^{(k)}(\tau,\varepsilon) + f_{ij}^{(k)}(\tau, r_{ij}^{(k-1)}(\tau,\varepsilon),\varepsilon);\ i \neq j.$$

Задамо для записаних рівнянь нульові початкові умови $r_{ij}^{(k)}(\Delta) = 0$, та припустимо, що справджуються оцінки

$$\lambda_i(\tau) - \lambda_j(\tau-\Delta) = O((\tau-\tau_0)^{q_{ij}}). \tag{10}$$

Тоді дістанемо: $r_{ij}^{(1)}(\tau,\varepsilon) = \dfrac{1}{\varepsilon}\displaystyle\int_{\Delta}^{\tau} e^{\varepsilon^{-1}\int_s^{\tau}((\lambda_i(\tau)-\lambda_j(\tau-\Delta))d\tau} f_{ij}^{(k)}(s, r_{ij}^{(0)}(s,\varepsilon),\varepsilon)ds$.

Згідно з [1; 5; 10] справджуються оцінки $\left|r_{ij}^{(1)}(\tau,\varepsilon)\right| = O\left(\varepsilon^{\frac{1}{q+1}}\right)$. З урахуванням визначених коефіцієнтів, продовжимо будувати інші невідомі матриці, і міркуваннями [3; 10] дістанемо оцінку для вектора $\alpha_{m,2}(t,\varepsilon)$:

$$\left\|\alpha_{m,2}(t,\varepsilon)\right\| = O\left(\varepsilon^{-\frac{m}{q+1}}\right);\ q = \max_{1\le i,j\le n} q_{ij}\,.$$

Описані міркування можна сформулювати у вигляді такої теореми.

Теорема 1. Якщо виконується умова 1^0, власні значення головної матриці системи (1) є простими і задовольняють умови (3) і (7), то основна початкова задача на другому кроці ($\Delta \le \tau \le 2\Delta$) має розв’язок (9). Якщо справджується також рівність (10) і дійсні частини власних значень головної матриці є не додатніми, то різниця між наближеним розв’язком (9) і деяким точним розв’язком системи (1) на вказаному кроці задовольняє оцінці

$$\left\|x(t,\varepsilon) - x_m(t,\varepsilon)\right\| \le C\varepsilon^{\frac{mq}{q+1}}\,.$$

Маючи асимптотичне зображення розв’язку на другому кроці, подальшу побудову виконуємо методом [6].

2. Зведення до системи рівнянь без відхилення аргументу.

Розглянемо систему рівнянь без відхилення аргументу:

$$\frac{dx(\tau,\varepsilon)}{dt} = A(\tau,\varepsilon)x\,.$$

Припустимо, що власні значення матриці $A(\tau, 0)$ простими для $\tau \in (0, L]$, і збігаються при $\tau = 0$, причому є суто уявними. Отже, за даних припущень справджується рівність (6), в якій $\lambda_k(\tau) = i\tau^q w_k(\tau);\ w_k(0) \ne 0,\ q \ge 1;\ k = 1, 2, ..., n$. Отже, $\tau = 0$ є ТП кратності q.

Підстановкою $x(\tau,\varepsilon) = U(\tau,\varepsilon)z(\tau,\varepsilon)$ отримаємо таку систему рівнянь

$$U(\tau,\varepsilon)\frac{dz(\tau,\varepsilon)}{dt} = \left(A(\tau,\varepsilon)U(\tau,\varepsilon) - \varepsilon\frac{dU(\tau,\varepsilon)}{d\tau}\right)z(\tau,\varepsilon)\,.$$

Невідомі матриці будуватимемо так, щоб справджувалась тотожність

$$A(\tau,\varepsilon)U(\tau,\varepsilon) - \varepsilon\frac{dU(\tau,\varepsilon)}{d\tau} = U(\tau,\varepsilon)\big(\Lambda(\tau,\varepsilon) + \varepsilon^{m+1}C_{m+1}(\tau,\varepsilon)\big).$$

У випадку стабільного спектру головної матриці, прирівнюючи коефіцієнти при степенях ε, дістанемо перші два рівняння системи (5). При наявності ТП, згідно із методом В. Вазова, для розв’язності рівнянь системи (5) у класі неперервних функцій, слід вважати вільним членом доданок $\varepsilon\dot{U}(\tau,\varepsilon)$. Матимемо таку систему матричних рівнянь:

$$\Lambda_0(\tau)U_0(\tau,\varepsilon) - U_0(\tau,\varepsilon)\Lambda_0(\tau) = \varepsilon\dot{U}_0(\tau,\varepsilon);$$

$$\Lambda_0(\tau)U_k(\tau,\varepsilon) - U_k(\tau,\varepsilon)\Lambda_0(\tau) = \varepsilon\dot{U}_k(\tau,\varepsilon) + F_k(t, U_{k-1}, \varepsilon),\ k = 1, 2, ..., m-1.$$

Інтегруючи рівняння цієї системи описаним у попередньому пункті способом, для невідомого вектора $z(\tau, \varepsilon)$ матимемо систему рівнянь

$$\varepsilon\frac{dz(\tau,\varepsilon)}{d\tau}=\left(\Lambda(\tau,\varepsilon)+\varepsilon^{m+1}C_{m+1}(\tau,\varepsilon)\right)z(\tau,\varepsilon),$$

де при виконанні згаданої вище умови $\mathrm{Re}\lambda_k(\tau)\equiv 0$ справджується оцінка $\left\|C_{m+1}(\tau,\varepsilon)\right\|=O\left(\varepsilon^{-\frac{m}{q+1}}\right)$. Записана система рівнянь з урахуванням наведеної оцінки з точністю до $O\left(\varepsilon^{\frac{mq}{q+1}}\right)$ інтегрується у квадратурах:

$$z(\tau,\varepsilon)=U(\tau,\varepsilon)\exp\left\{\varepsilon^{-1}\int_0^\tau\Lambda(s,\varepsilon)ds\right\}c+\varepsilon^{\frac{mq}{q+1}}\alpha_{m+1}(\tau,\varepsilon).$$

Тут c – вектор довільних сталих, а вектор $\alpha_{m+1}(\tau, \varepsilon)$ є обмеженим в околах ТП та точки $\varepsilon = 0$. Таким чином, маємо наближене значення фундаментальної матриці однорідної системи:

$$X(\tau,\varepsilon)=U(\tau,\varepsilon)\exp\left\{\varepsilon^{-1}\int_0^\tau\Lambda(s,\varepsilon)ds\right\}+\varepsilon^{\frac{mq}{q+1}}C_{m+1}(\tau,\varepsilon).$$

Скориставшись формулою із [2]

$$(A+B)^{-1}=A^{-1}-A^{-1}(E+BA^{-1})^{-1}BA^{-1}, \tag{11}$$

знайдемо їй обернену матрицю

$$X^{-1}(\tau,\varepsilon)=\exp\left\{-\varepsilon^{-1}\int_0^\tau\Lambda(s,\varepsilon)ds\right\}U^{-1}(\tau,\varepsilon)c+\varepsilon^{\frac{mq}{q+1}}D(\tau,\varepsilon).$$

Матриця $C_{m+1}(\tau, \varepsilon)$ є рівномірно обмеженою в околах ТП та точки $\varepsilon = 0$ за побудовою, а матриця $D_{m+1}(\tau, \varepsilon)$ згідно з формулою (11). Виконаємо у системі (1) підстановку $x(\tau,\varepsilon)=X(\tau,\varepsilon)z(\tau,\varepsilon)$, у результаті чого дістанемо систему рівнянь

$$\varepsilon\frac{dz(\tau,\varepsilon)}{d\tau}=M(\tau,\varepsilon)z(\tau-\Delta,\varepsilon)+\varepsilon^{\frac{mq}{q+1}}R_{m+1}(\tau,\varepsilon). \tag{12}$$

В системі (12) позначено:

$M(\tau,\varepsilon)=X_1^{-1}(\tau,\varepsilon)B(\tau,\varepsilon)X_1(\tau-\Delta,\varepsilon)z(\tau-\Delta,\varepsilon)$;

$X_1(\tau,\varepsilon)=U(\tau,\varepsilon)\exp\left\{\varepsilon^{-1}\int_0^\tau\Lambda(s,\varepsilon)ds\right\}$.

Таким чином, система (1) звелась до системи (12), яка з фіксованою точністю не містить членів без відхилення аргументу.

Висновки

Таким чином, нестабільність спектру або наявність точок повороту потребує використання методів, що призводять до появи виразів, які містять кратні інтеграли від швидкозмінних функцій, що створює певні незручності як при використанні аналітичного запису, так і при отриманні числових розрахунків. Використання багатомасштабних методів є дещо зручнішим для звичайних диференціальних рівнянь, але для диференціально-різницевих потребує деяких змін, дослідження у цьому напрямку матимуть як теоретичний, так і практичний інтерес. Зведення системи із виродженою матрицею при похідній до такої, що не містить членів без відхилення аргументу, потребує додаткових досліджень.

Література

1. Grimm L. J. and Harris W. A. Solutions of a singularly perturbed differential system with turning points // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. Sec I. A. – 1989. – 36, №3. – p. 753-763.
2. Householder A.S. Principles Of Numerical Analysis. – New York – Toronto – London: McGraw Hill Book Company Inc., 1953. – 302 p.
3. Iwano M., Sibuya Y. Reduction of the order of a linear ordinary differential equation containing a small parameter // Kōdai Math. Semin. Repts. – 1962. 36, №3. – p. 1-28. DOI:10.2996/KMJ/1138844728.
4. Ключник І. Г., Завізіон Г. В. Про асимптотичне інтегрування сингулярно збуреної системи лінійних диференціальних рівнянь з відхиленням аргументу // Нелінійні коливання. – 2010. – Т. 13., № 2. – С. 161-176. URI: http://dspace.nbuv.gov.ua/handle/123456789/174773.
5. Lomov S.A. Introduction to General Theory of Singular Perturbations. Vol. 112 of Translations of Math; Monographs, American Mathematical Society: Providence, RI, USA, 1992. – 375 p. DOI: https://doi.org/10.1090/mmono/112 .
6. Самойленко А. М. Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями / А. М. Самойленко, М. І. Шкіль, В. П. Яковець. – Київ : Вища шк., 2000. – 294 с.
7. Самойленко А.М., Самусенко П.Ф. Асимптотичне інтегрування сингулярно збурених диференціально-алгебраїчних рівнянь із точками повороту. I // Укр. мат. журн. – 2020. – т. 72, № 12. – С. 1669-1681. DOI: https://doi.org/10.37863/umzh.v72i12.6261
8. Самойленко А.М., Самусенко П.Ф. Асимптотичне інтегрування сингулярно збурених диференціально-алгебраїчних рівнянь із точками повороту. II // Укр. мат. журн. – 2021, т. 73, № 6. – С. 849-864. DOI: https://doi.org/10.1007/s11253-021-01972-5
9. Самусенко П.Ф. Побудова асимптотичних розв'язків систем диференціальних рівнянь з відхиленням аргументу та виродженою матрицею при похідних // Нелінійні коливання. – 2002. – Т. 5, № 4. – С. 527-539. URI: http://dspace.nbuv.gov.ua/handle/123456789/176108.

10. Wasow W. Linear Turning Point Theory. – New York: Acad. Press, 1985. – 246 p. DOI: https://doi.org/10.1007/978-1-4612-1090-0.

Petro F. Samusenko,
National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute", Kyiv, Ukraine,
Galyna V. Danylina, Mykola O. Rashevs'kyi
Kryvyi Rih Professional College of the National Aviation University, Kryvyi Rih, Ukraine.

On the Asymptotic Integration of Linear Systems of Differential Equations with Delay

An asymptotic representation of the solution for the basic initial problem of a system of linear singularly perturbed differential equations delay is constructed. The integration of such systems of equations with unstable spectrum was started in the works by M. I. Shkil' and his students. In this study, an asymptotic representation of the solution of a system of differential-difference equations with instabilities in the spectrum of the main matrix is constructed. The instability peculiar only in equations with argument deviation is investigated. Asymptotic estimates of the error are given.

Keywords: *turning point, singular perturbation, asymptotic solution, differential-difference equation*.