УДК 517.5

Чайченко С.О., Шотт В.Г.

[1] *доктор фіз.-мат. н., професор кафедри математики та інформатики, ДВНЗ «ДДПУ»*

e-mail: s.chaichenko@gmail.com, ORCID 0000-0002-2724-8749

[2] *здобувачка другого (магістерського) РВО за ОП «Середня освіта (Математика)», фізико-математичний факультет ДВНЗ «ДДПУ»*

e-mail: shott.1979@meta.ua, ORCID 0009-0008-9923-3010

НЕРІВНОСТІ ТИПУ ЧЕБИШЕВА ДЛЯ ІНТЕГРАЛІВ ПО НЕОБМЕЖЕНИХ ПРОМІЖКАХ

В роботі доведено нерівності типу Чебишева для рядів та інтегралів по необмежених проміжках інтегрування.

Ключові слова: *нерівності для рядів, нерівності для інтегралів, нерівності типу Чебишева.*

DOI: https://doi.org/...

Вступ

Нехай $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ – інтегровані функції, що не зростають (або не спадають). Нехай, також, $p:[a,b]\to\mathbb{R}_0^+$ – інтегрована функція. Тоді (див., наприклад, [1, Chap. IX])

$$\int_a^b p(x)f(x)g(x)dx \geq \tag{1}$$

$$\geq \int_a^b p(x)f(x)dx\int_a^b p(x)g(x)dx\left(\int_a^b p(x)dx\right)^{-1}.$$

Якщо одна з функцій f або g не зростає, а інша – не спадає, то справджується протилежна нерівність, тобто

$$\int_a^b p(x)f(x)g(x)dx \leq \tag{2}$$

$$\leq \int_a^b p(x)f(x)dx\int_a^b p(x)g(x)dx\left(\int_a^b p(x)dx\right)^{-1}.$$

Нерівності вигляду (1) і (2) отримали називу *нерівності Чебишева.* Ці нерівності були встановлені П.Л. Чебишевим [2, 3] і постійно привертали увагу дослідників. Тому, відомо багато різноманітних доведень та узагальнень нерівностей вигляду (1) і (2). Зокрема, з цими результатами можна ознайомитись в монографії [1, Ch. IX], де наведено дуже детальний історичний і хронологічний огляд розвитку досліджень нерівностей типу Чебишева та суміжних питань (див., також, [4, 5]).

1. Основні поняття та попередні відомості

В роботі [6] дослідження нерівностей типу Чебишева були розвинені в такому напрямку: знайдено необхідні та достатні умови на функції $g:[a,b]\to\mathbb{R}_0^+$ і $p:[a,b]\to\mathbb{R}^+$ щоб для довільної монотонної функції $f:[a,b]\to\mathbb{R}_0^+$ виконувались співвідношення

$$\int_a^b p(x)f(x)g(x)dx \ge \left(\frac{\int_a^b p^r(x)f^r(x)dx}{\int_a^b p^r(x)dx}\right)^{1/r}\cdot\int_a^b p(x)g(x)dx \qquad (3)$$

і

$$\int_a^b p(x)f(x)g(x)dx \le \left(\frac{\int_a^b p^r(x)f^r(x)dx}{\int_a^b p^r(x)dx}\right)^{1/r}\cdot\int_a^b p(x)g(x)dx \qquad (4)$$

де r – довільне фіксоване додатне число.

В продовження досліджень нерівностей типу (1) – (4), в роботі [7] було одержано таке твердження.

Теорема 1. *Нехай* $g:[a,b]\to\mathbb{R}_0^+$ *та* $p:[a,b]\to\mathbb{R}^+$ *– інтегровані функції, такі що добуток с також є інтегрованою на* $[a,b]$ *функцією. Нехай, далі* $f:[a,b]\to\mathbb{R}_0^+$ *– незростаюча функція.*

Тоді для довільної опуклої вниз функції $M:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ *такої, що* $M(0)=0$*, справджується наступна нерівність:*

$$\int_a^b p(x)g(x)M\left(f(x)\right)dx \le \sup_{s\in(a,b]}\left\{M\left(\frac{\int_a^b p(x)f(x)dx}{\int_a^s p(x)dx}\right)\int_a^s p(x)g(x)dx\right\}, \qquad (5)$$

а для довільної опуклої вгору функції $M:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ *такої, що* $M(0)=0$*, справджується наступна нерівність:*

$$\int_a^b p(x)g(x)M\left(f(x)\right)dx \ge \inf_{s\in(a,b]}\left\{M\left(\frac{\int_a^b p(x)f(x)dx}{\int_a^s p(x)dx}\right)\int_a^s p(x)g(x)dx\right\}. \qquad (6)$$

Якщо в нерівностях (5) і (6) покласти $M(t)=t$, то отримаємо класичні нерівності Чебишева (1) і (2) відповідно.

В роботі [7] було зазначено, що аналогічне до теореми 1 твердження також буде мати місце і у випадку, коли $b=\infty$, а саме.

Теорема 2. *Нехай* $g:[a,\infty]\to\mathbb{R}_0^+$ *та* $p:[a,\infty]\to\mathbb{R}^+$ *– інтегровані функції такі, що добуток* $p:[a,b]\to\mathbb{R}^+$ *також є інтегрованою на* $[a,\infty]$ *функцією. Нехай, також,* $f:[a,\infty]\to\mathbb{R}_0^+$ *– незростаюча функція.*

Тоді для довільної опуклої вниз функції $M:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ *такої, що* $M(0)=0$, *виконується нерівність*

$$\int_a^\infty p(x)g(x)M\big(f(x)\big)dx \le \sup_{s\in(a,\infty)}\left\{M\left(\frac{\int_a^\infty p(x)f(x)dx}{\int_a^s p(x)dx}\right)\int_a^s p(x)g(x)dx\right\}, \quad (7)$$

а для довільної опуклої вгору функції $M:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ *такої, що* $M(0)=0$, *справджується наступна нерівність:*

$$\int_a^\infty p(x)g(x)M\big(f(x)\big)dx \ge \inf_{s\in(a,\infty)}\left\{M\left(\frac{\int_a^\infty p(x)f(x)dx}{\int_a^s p(x)dx}\right)\int_a^s p(x)g(x)dx\right\}. \quad (8)$$

При цьому відповідне доведення не було наведено.

2. Основна частина

Основним результатом роботи є проведення повного доведення теореми 2. При цьому будемо використовувати міркування, що застосовувались при доведенні відповідного твердження з роботи [7].

Доведення теореми 2 спирається на наступну лему.

Лема 1. *Нехай* $a=\{a_k\}_{k=1}^\infty$, $b=\{b_k\}_{k=1}^\infty$ *та* $p=\{p_k\}_{k=1}^\infty$ *послідовності невід'ємних чисел таких, що* $a_1\ge a_2\ge\ldots$, $p_k>0$ *і ряд* $\sum_{k=1}^\infty p_kb_k$ *збігається.*

Тоді для довільної опуклої вниз функції $M:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ *такої, що* $M(0)=0$, *виконується наступна нерівність*

$$\sum_{k=1}^\infty p_kb_kM(a_k)\le\sup_{s\in\mathbb{N}}\left\{M\left(\frac{\sum_{k=1}^\infty p_ka_k}{\sum_{k=1}^s p_k}\right)\sum_{k=1}^s p_kb_k\right\}, \quad (7')$$

і для довільної опуклої вгору функції $M:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ *такої, що* $M(0)=0$, *виконується наступна нерівність*

$$\sum_{k=1}^\infty p_kb_kM(a_k)\ge\inf_{s\in\mathbb{N}}\left\{M\left(\frac{\sum_{k=1}^\infty p_ka_k}{\sum_{k=1}^s p_k}\right)\sum_{k=1}^s p_kb_k\right\}. \quad (8')$$

Доведення леми. Розглянемо випадок, коли функція M є опуклою вниз (доведення у випадку, коли M – опукла вгору цілком аналогічне). Для доведення будемо використовувати метод математичної індукції по m, де $m\in\mathbb{N}$ – кількість доданків в сумах з нерівності (7').

Покажемо що для довільної опуклої вниз функції $M:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ такої, що $M(0)=0$, виконується нерівність ($7'$).

Якщо $m=1$, то нерівність ($7'$) є тривіальною.

Розглянемо випадок двох доданків $m=2$. Покладемо при $k=1,2$,

$$c=p_1a_1+p_2a_2,\quad x_0=p_1a_1,\quad \alpha_k=p_kb_k,\quad \beta_k=p_k^{-1}, \tag{9}$$

і розглянемо на інтервалі $[0,c]$ функцію

$$h(x)=\alpha_1M(\beta_1x)+\alpha_2M(\beta_2(c-x)). \tag{10}$$

Внаслідок опуклості функції $M(t)$, функція $h(x)$ теж є опуклою вниз на відрізку $[0,c]$. Звідси випливає, що дана функція досягає свого найбільшого на відрізку $[x_1;x_2]\subset[0;c]$ значення на одному із кінців цього відрізка. Тому

$$h(x)\le\max\{h(x_1),h(x_2)\}\quad \forall x\in[x_1,x_2]. \tag{11}$$

Покладаючи $x_1:=\beta_2c(\beta_1+\beta_2)^{-1}$ та $x_2:=c$, робимо висновок, що число x_0 (внаслідок монотонності послідовності a) належить проміжку $[x_1;x_2]$.

Отже, з огляду на співвідношення (9) – (11) і рівність $M(0)=0$, отримуємо

$$\sum_{k=1}^{2}p_kb_kM(a_k)=h(x_0)\le\max\{h(x_1),h(x_2)\}=$$

$$=\max\left\{M\left(\frac{p_1a_1+p_2a_2}{p_1+p_2}\right)(p_1b_1+p_2b_2),M\left(\frac{p_1a_1+p_2a_2}{p_1}\right)p_1b_1\right\}.$$

Отже, у випадку двох доданків ($m=2$) нерівність ($7'$) справджується.

Зараз припустимо, що при $m=n-1\ge1$, твердження леми є правильним. Покажемо, що для $m=n$, воно також виконується. Скористаємося позначеннями (9) і розглянемо на проміжку $[0,c]$ функцію $h(x)$ вигляду (10). Покладаючи $x_1:=\beta_2c(\beta_1+\beta_2)^{-1}$ та $x_2:=c-a_3/\beta_2$, робимо висновок, що число x_0 (внаслідок монотонності послідовності a) належить проміжку $[x_1;x_2]$. Тому, з огляду на співвідношення (9)–(11) одержуємо

$$\sum_{k=1}^{n}p_kb_kM(a_k)=h(x_0)+\sum_{k=3}^{n}p_kb_kM(a_k)\le\max\{h(x_1),h(x_2)\}+\sum_{k=3}^{n}p_kb_kM(a_k). \tag{12}$$

Далі, у випадку, якщо $h(x_1)\ge h(x_2)$, покладемо

$$p'_k=\begin{cases}p_1+p_2, & k=1,\\ p_{k+1}, & k=\overline{2,m-1};\end{cases}\quad b'_k=\begin{cases}(p_1b_1+p_2b_2)/(p_1+p_2), & k=1,\\ b_{k+1}, & k=\overline{2,m-1};\end{cases} \tag{13}$$

$$a'_k=\begin{cases}(p_1a_1+p_2a_2)/(p_1+p_2), & k=1\\ a_{k+1}, & k=\overline{2,m-1}.\end{cases} \tag{14}$$

Тоді внаслідок співвідношення (12), робимо висновок, що має місце оцінка

$$\sum_{k=1}^{m} p_k b_k M\left(a_k\right) \le \sum_{k=1}^{m-1} p'_k b'_k M\left(a'_k\right). \tag{15}$$

У випадку, коли $h\left(x_1\right) < h\left(x_2\right)$, співвідношення (15) виконується для послідовностей a', b' та p' вигляду

$$p'_k = \begin{cases} p_1, & k = 1, \\ p_2 + p_3, & k = 2, \\ p_{k+1}, & k = \overline{3, m-1}; \end{cases} \tag{16}$$

$$b'_k = \begin{cases} b_1, & k = 1, \\ (p_2 b_2 + p_3 b_3)(p_2 + p_3)^{-1}, & k = 2, \\ b_{k+1}, & k = \overline{3, m-1}; \end{cases} \tag{17}$$

$$a'_k = \begin{cases} (p_1 a_1 + p_2 a_2 - p_3 a_3)/p_1, & k = 1 \\ a_{k+1}, & k = \overline{2, m-1}. \end{cases} \tag{18}$$

Сума в правій частині (15) містить $n-1$ доданок. До того ж, в обох випадках послідовності a', b' та p', задовольняють умови нашого припущення. Тому, беручи до уваги співвідношення (13) – (18), отримуємо необхідну оцінку (7'):

$$\sum_{k=1}^{n} p_k b_k M(a_k) \le \sum_{k=1}^{n-1} p'_k b'_k M(a'_k) \le \sup_{s \in [1, n-1]} \left\{ M\left(\frac{\sum_{k=1}^{n-1} p'_k a'_k}{\sum_{k=1}^{s} p'_k} \right) \sum_{k=1}^{s} p'_k b'_k \right\} \le$$

$$\le \sup_{s \in [1, n]} \left\{ M\left(\frac{\sum_{k=1}^{n} p_k a_k}{\sum_{k=1}^{s} p_k} \right) \sum_{k=1}^{s} p_k b_k \right\}.$$

Враховуючи довільність $n \in \mathbb{N}$, а також збіжність ряду $\sum_{k=1}^{\infty} p_k b_k$, остаточно отримуємо

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k b_k M(a_k) \le \sup_{s \in \mathbb{N}} \left\{ M\left(\frac{\sum_{k=1}^{\infty} p_k a_k}{\sum_{k=1}^{s} p_k} \right) \sum_{k=1}^{s} p_k b_k \right\}.$$

Лему доведено.

DOI: https://doi.org/...

Перейдемо тепер до **доведення теореми** і розглянемо випадок, коли функція M є опуклою вниз (доведення у випадку, коли M — опукла вгору цілком аналогічне). Спочатку переконаємося в справедливості нерівності (7) для довільної функції f такої, що для деякого $m \in \mathbb{N}$

$$f(x) = a_k, \quad x \in \left[l_{k-1}, l_k\right), k = 1, 2, \ldots,$$

де $a_1 > a_2 > \ldots \geq 0$ і $a = l_0 < l_1 < l_2 < \ldots$.

При кожному $k = 1, 2, \ldots,$ покладемо

$$p_k = \int_{l_{k-1}}^{l_k} p(x)dx, \quad b_k = \int_{l_{k-1}}^{l_k} p(x)g(x)dx \left(\int_{l_{k-1}}^{l_k} p(x)dx \right)^{-1}.$$

Тоді, внаслідок леми 1, одержуємо (7):

$$\int_a^\infty p(x)g(x)M\left(f(x)\right)dx = \sum_{k=1}^\infty \int_{l_{k-1}}^{l_k} p(x)g(x)M\left(f(x)\right)dx =$$

$$= \sum_{k=1}^\infty p_k b_k M(a_k) \leq \sup_{s\in\mathbb{N}} \left\{ M\left(\frac{\sum_{k=1}^\infty p_k a_k}{\sum_{k=1}^s p_k} \right) \sum_{k=1}^s p_k b_k \right\} =$$

$$= \sup_{s\in\mathbb{N}} \left\{ M\left(\frac{\int_a^\infty p(x)f(x)dx}{\int_a^{l_s} p(x)dx} \right) \int_a^{l_s} p(x)g(x)dx \right\} \leq$$

$$\leq \sup_{s\in(a,\infty)} \left\{ M\left(\frac{\int_a^\infty p(x)f(x)dx}{\int_a^s p(x)dx} \right) \int_a^s p(x)g(x)\,dx \right\}.$$

Отримаємо нарешті нерівність (7) в загальному випадку. Спочатку зауважимо, якщо функції M і f задовольняють умови теореми 2, то існує число $n_0 = n_0\left(M, f\right) \in \mathbb{N}$ таке, що при кожному $n > n_0$ і для всіх $x \in [a;\infty)$, виконується нерівність

$$\left|M\left(f(x)\right)\right| < n.$$

Для кожного $n > n_0$, розглянемо систему точок $l_0^{(n)} < l_1^{(n)} < \ldots$, що визначаються наступним чином: покладаємо $l_0^{(n)} := a$ і при кожному $k \in \mathbb{N}$ визначимо величину $l_k^{(n)}$ як найбільше додатне число таке, що $l_k^{(n)} > l_{k-1}^{(n)}$ і для всіх $x \in \left[l_{k-1}^{(n)}; l_k^{(n)}\right)$ виконується наступне співвідношення:

$$\left|M\left(f\left(l_{k-1}^{(n)}\right)\right) - M\left(f(x)\right)\right| \leq \frac{1}{n}.$$

Внаслідок умов на функції M та f, така система точок завжди існує.

Далі, розглянемо функцію $f_n = f_n(x)$ таку, що

$$f_n(x) \equiv \lim_{t \to l_k^{(n)}-} f(t), \quad \forall x \in \left[l_{k-1}^{(n)}; l_k^{(n)} \right), k = 1, 2, \dots. \tag{19}$$

Бачимо, що нерівність

$$\left| M\left(f(x) \right) - M\left(f_n(x) \right) \right| \le \frac{1}{n},$$

справджується для всіх $n > n_0$ і $x \in [a, \infty)$. Завдяки інтегрованості на $[a, \infty]$ добутку $p(x)g(x)$, величини

$$\int_a^\infty p(x)g(x)\left[M\left(f(x) \right) - M\left(f_n(x) \right) \right] dx$$

збігаються до нуля при $n \to \infty$. Крім цього, при кожному $n > n_0$, функція $f_n(x)$ на $[a, \infty)$ не зростає і задовольняє умови твердження, для якого справедливість нерівності (7) вже доведено.

Тому, враховуючи (19) і неперервність функції M, робимо висновок, що для довільного $\varepsilon > 0$ при всіх достатньо великих n ($n > n_1(\varepsilon)$),

$$\int_a^\infty p(x)g(x)M\left(f(x) \right) dx = \int_a^\infty p(x)g(x)M\left(f_n(x) \right) dx +$$

$$+ \int_a^\infty p(x)g(x)\left(M\left(f(x) \right) - M\left(f_n(x) \right) \right) dx \le$$

$$\le \sup_{s \in (a;\infty)} \left\{ M\left(\frac{\int_a^\infty p(x) f_n(x) dx}{\int_a^s p(x) dx} \right) \int_a^s p(x)g(x)dx \right\} + \frac{\varepsilon}{2} \le$$

$$\le \sup_{s \in (a;\infty)} \left\{ M\left(\frac{\int_a^\infty p(x) f(x) dx}{\int_a^s p(x) dx} \right) \int_a^s p(x)g(x)dx \right\} + \varepsilon.$$

Отже, співвідношення (5) дійсно виконується.
Теорему доведено.

Література

1. D. S. Mitrinović, J. E. Pečarić, A. M. Fink, "Classical and new inequalities in analysis." Kluwer (1993).
2. P. L. Chebyshev, "O priblizhennyh vyrazhenijah odnih integralov cherez drugie," Soobschenija i Protokoly Zasedanij Matematicheskogo Obschestva pri Imperatorskom Khar’kovskom Universitete, No. 2 (1882), 93–98.

3. P. L. Chebyshev, "Ob odnom rjade, dostavljajuschem predel'nye velichiny integralov pri razlozhenii podintegral'noi funkcii na mnozhiteli," Prilozhenie k 57 tomy Zapisok Imp. Akad. Nauk, No 4 (1883).
4. D. S. Mitrinović and P. M. Vasić, "History, variations and generalisations of the Čebyšev inequality and the question of some priorities," Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. No. 461–497 (1974), 1–30.
5. D. S. Mitrinović and J. E. Pečarić, "History, variations and generalisations of the Čebyšev inequality and the question of some priorities II," Rad JAZU (Zagreb), 450, fasc. 9 (1990), 139–156.
6. A. L. Shidlich, "On necessary and sufficient for validity of some Chebyshev-Type inequalities," J. Math. Inequal., 5, 1 (2011), 71–85.
7. A. L. Shidlich and S. O. Chaichenko, On some inequalities of Chebyshev type // Math. Ineq. and Appl. – 2015. – 18, № 3. – P. 1313 – 1320.

Stanislav O. Chaichenko, Viktoriia H. Shott
Donbas State Pedagogical University, Sloviansk, Ukraine

Chebyshev Type Inequalities For Integrals On Unbounded Intervals

We proved some Chebyshev type inequalities for series and integrals on unbounded intervals.

Keywords: *inequalities for series, inequalities for integrals, Chebyshev type inequalities.*