

УДК 517.5

Чайченко С.О., Рибаків О.М.¹ доктор фіз.-мат. наук, професор кафедри математики, фізики та інформатики, ДВНЗ «ДДПУ»e-mail: s.chaichenko@gmail.com,

ORCID 0000-0002-2724-8749

² здобувач другого (магістерського) РВО за ОП «Середня освіта (Математика)», ДВНЗ «ДДПУ»e-mail: pionerball@ukr.net,

ORCID 0009-0000-2320-8080

АПРОКСИМАЦІЙНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДІАГОНАЛЬНИХ ОПЕРАТОРІВ У ВАГОВИХ ПРОСТОРАХ ОРЛИЧА

В роботі досліджено апроксимаційні характеристики діагональних операторів у вагових просторах послідовностей Орлича $l_{M,\mu}$. Зокрема, знайдено точні значення величин найкращих наближень та базисного поперечника деяких множин образів діагональних операторів у цих просторах.

Ключові слова: вагові простори послідовностей Орлича, діагональні оператори, найкращі наближення, базисний поперечник.

Вступ

Нехай $M(t)$, $t \geq 0$, — довільна функція Орлича, тобто, неспадна опукла вниз функція така, що $M(0) = 0$ і $M(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$. Нехай, далі $\mu = \{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ — послідовність невід'ємних чисел. Ваговим простором Орлича $l_{M,\mu}$ [6], що визначається даною функцією $M(t)$, називають лінійний простір всіх послідовностей $\mathbf{x} = \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ дійсних чисел, для яких

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k M(x_k) < \infty.$$

Простір $l_{M,\mu}$ є банаховим з нормою

$$\|\mathbf{x}\|_{l_{M,\mu}} := \inf \left\{ \alpha > 0 : \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k M(|x_k|/\alpha) \leq 1 \right\}. \quad (1)$$

Кажуть, що функція Орлича $M(t)$ задовольняє Δ_2 -умову, якщо існує стала $C > 0$ така, що при всіх $t \geq 0$ справджується нерівність $M(2t) \leq CM(t)$.

Зазначимо, що у випадку, коли функція $M(t) = t^p$, $p \geq 1$, $\mu_k = 1, k = 1, 2, \dots$, простори $l_{M,\mu}$ співпадають зі звичайними просторами l_p з нормою

$$\|\mathbf{x}\|_{l_p} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{1/p}, \quad (2)$$

якщо ж функція $M(t)$ задовольняє Δ_2 -умову, $\mu_k = 1, k = 1, 2, \dots$, то як показано в [7, твердження 1], має місце рівність

$$l_{M,1} := l_M = \{x = \{x_k\}_{k=1}^\infty : \sum_{k=1}^\infty M(|x_k|/\alpha) < \infty \quad \forall \alpha > 0\}, \quad (3)$$

при цьому система векторів $e_i = \{e_k^{(i)}\}_{k=1}^\infty$, де

$$e_k^{(i)} = \begin{cases} 0, & k \neq i, \\ 1, & k = i, \end{cases}$$

є базисом у цьому просторі.

Зрозуміло, що якщо функція $M(t)$ задовольняє Δ_2 -умову і $\mu = \{\mu_k\}_{k=1}^\infty$ – послідовність невід'ємних чисел, то справджується рівність

$$l_{M,\mu} = \{x = \{x_k\}_{k=1}^\infty : \sum_{k=1}^\infty \mu_k M(|x_k|/\alpha) < \infty \quad \forall \alpha > 0\}. \quad (4)$$

У подальшому будемо вважати, що $\mu = \{\mu_k\}_{k=1}^\infty$ – послідовність невід'ємних чисел, яка задовольняє нерівності

$$1 \leq \mu_k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (5)$$

Простори l_M були введені до розгляду В. Орличем у праці [6] і в подальшому досліджувалися багатьма авторами, зокрема, у роботах [7-12].

У цій роботі досліджено апроксимаційні властивості діагональних операторів у вагових просторах Орлича числових послідовностей. Отримано точні значення важливих апроксимаційних характеристик (таких, як найкраще наближення, базисний поперечник) множин образів діагональних операторів у просторах $l_{M,\mu}$. Зокрема, отримані результати поширюють відповідні твердження доведені для просторів l_p (l_p^d) в роботах [1-5], а також узагальнюють відповідні результати, отримані в роботі [13] на випадок вагових просторів Орлича $l_{M,\mu}$.

Основна частина

Нехай $\lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ — довільна послідовність додатних чисел, що задовольняють умову

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = 0. \quad (6)$$

і

$$T: \mathbf{x} = \{x_k\}_{k=1}^\infty \rightarrow T\mathbf{x} = \{\lambda_k x_k\}_{k=1}^\infty$$

— діагональний оператор, заданий на просторі $l_{M,\mu}$.

Нехай також $M(t)$ і $N(t)$ — дві довільні функції Орлича, $l_{M,\mu}$ та $l_{N,\mu}$ — простори Орлича, які відповідають цим функціям, і $B_{l_{M,\mu}}$ — одинична куля простору $l_{M,\mu}$. Для будь-якого фіксованого набору γ_n із n різних натуральних чисел розглянемо величину

$$E_{\gamma_n}(T: l_{M,\mu} \rightarrow l_{N,\mu}) = E_{\gamma_n}(T(B_{l_{M,\mu}}), l_{N,\mu}) = \sup_{\mathbf{x} \in B_{l_{M,\mu}}} E_{\gamma_n}(T\mathbf{x}, l_{N,\mu}) :=$$

$$:= \sup_{\mathbf{x} \in B_{l_{M,\mu}}} \inf_{a_i} \|T\mathbf{x} - P_{\gamma_n}\|_{l_{N,\mu}}$$

найкращого наближення в просторі $l_{N,\mu}$ множини $T(B_{l_{M,\mu}})$ за допомогою всіх можливих n -членних поліномів

$$P_{\gamma_n} = \sum_{i \in \gamma_n} a_i \mathbf{e}_i,$$

що відповідають набору γ_n , a_i — довільні дійсні числа.

Покажемо, що коли

$$0 < N(t) \leq M(t), \quad t \in [0, 1], \quad (7)$$

для послідовності μ виконується нерівність (5), а послідовність λ задовольняє умову (6), для довільного $\mathbf{x} \in B_{l_{M,\mu}}$ маємо $T\mathbf{x} \in l_{N,\mu}$ і отже, величини $E_{\gamma_n}(T: l_{M,\mu} \rightarrow l_{N,\mu})$ за таких умов мають зміст.

Дійсно, поклавши $\lambda^* := \max_{k \in \mathbb{N}} \lambda_k$, в такому випадку з врахуванням неспадання функцій $M(t)$ та $N(t)$ для довільного $\mathbf{x} \in B_{l_{M,\mu}}$ будемо мати $|x_k| \leq 1, k = 1, 2, \dots$, і отже

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k N\left(\frac{\lambda_k |x_k|}{\lambda^*}\right) &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k N(|x_k|) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k M(|x_k|) \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k M\left(\frac{|x_k|}{\|\mathbf{x}\|_{l_{M,\mu}}}\right) \leq 1. \end{aligned}$$

Звідси випливає, що $\|T\mathbf{x}\|_{l_{N,\mu}} \leq \lambda^* < \infty$ і $T\mathbf{x} \in l_{N,\mu}$.

Теорема 1 Нехай $M(t)$ та $N(t)$ — довільні функції Орлича, що задовольняють співвідношення (7) і

$$\inf\{\alpha > 0 : M(1/\alpha) \leq 1\} = \inf\{\alpha > 0 : N(1/\alpha) \leq 1\}. \quad (8)$$

Нехай, далі, $\mu = \{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ — послідовність невід'ємних чисел і $\lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ — довільна послідовність додатних чисел, для яких виконуються умови (5) і (6) відповідно.

Тоді для довільного набору γ_n із n різних натуральних чисел має місце рівність

$$E_{\gamma_n}(T: l_{M,\mu} \rightarrow l_{N,\mu}) = \max_{k \notin \gamma_n} \lambda_k. \quad (9)$$

Доведення. Оскільки для довільного $\mathbf{x} \in l_{N,\mu}$, будь-яких $\alpha > 0$ та $a_i \in \mathbb{R}$

$$\sum_{k \in \gamma_n} \mu_k N(|x_k - a_i|/\alpha) + \sum_{k \notin \gamma_n} \mu_k N(|x_k|/\alpha) \geq \sum_{k \notin \gamma_n} \mu_k N(|x_k|/\alpha),$$

то для довільного $\mathbf{x} \in l_{N,\mu}$

$$E_{\gamma_n}(\mathbf{x}, l_{N,\mu}) = \mathcal{E}_{\gamma_n}(\mathbf{x}, l_{N,\mu}) := \|\mathbf{x} - S_{\gamma_n}(\mathbf{x})\|_{l_{N,\mu}} = \quad (10)$$

$$= \inf \{ \alpha > 0 : \sum_{k \notin \gamma_n} \mu_k N(|x_k|/\alpha) \leq 1 \},$$

де

$$S_{\gamma_n}(\mathbf{x}) = \sum_{k \in \gamma_n} x_k \mathbf{e}_k.$$

Покладемо

$$\lambda_{k^*} = \lambda_{k^*}(\gamma_n) = \max_{k \notin \gamma_n} \lambda_k.$$

Для довільного $\mathbf{x} \in B_{l_{M,\mu}}$ знаходимо

$$\begin{aligned} \sum_{k \notin \gamma_n} \mu_k N\left(\frac{\lambda_k |x_k|}{\lambda_{k^*}}\right) &\leq \sum_{k \notin \gamma_n} \mu_k N(|x_k|) \leq \\ &\leq \sum_{k \notin \gamma_n} \mu_k M(|x_k|) \leq \sum_{k \notin \gamma_n} \mu_k M\left(\frac{|x_k|}{\|\mathbf{x}\|_{l_{M,\mu}}}\right) \leq 1. \end{aligned}$$

Звідси випливає, що

$$E_{\gamma_n}(T: l_{M,\mu} \rightarrow l_{N,\mu}) \leq \lambda_{k^*} = \max_{k \notin \gamma_n} \lambda_k.$$

З іншого боку, розглянемо елемент $\mathbf{x}^* = \mathbf{e}_{k^*} / \|\mathbf{e}_{k^*}\|_{l_{M,\mu}}$. Внаслідок (8)

$$\|\mathbf{e}_{k^*}\|_{l_{M,\mu}} = \inf \{ \alpha > 0 : \mu_{k^*} M(1/\alpha) \leq 1 \} =$$

$$= \inf \{ \alpha > 0 : \mu_{k^*} N(1/\alpha) \leq 1 \} = \|\mathbf{e}_{k^*}\|_{l_{N,\mu}},$$

тому $\|\mathbf{x}^*\|_{l_{M,\mu}} = \|\mathbf{x}^*\|_{l_{N,\mu}} = 1$ і $\mathbf{x}^* \in B_{l_{M,\mu}}$. Звідси випливає, що

$$E_{\gamma_n}(T\mathbf{x}^*, l_{N,\mu}) = \inf \{ \alpha > 0 : \mu_{k^*} N\left(\frac{\lambda_{k^*}}{\alpha \|\mathbf{e}_{k^*}\|_{l_{M,\mu}}}\right) \leq 1 \} =$$

$$= \inf \{ \alpha > 0 : \mu_{k^*} N \left(\frac{\lambda_{k^*}}{\alpha \| \mathbf{e}_{k^*} \|_{l_{N,\mu}}} \right) \leq 1 \} = \lambda_{k^*}.$$

Отже, дійсно справджується рівність (9).

Теорему доведено.

Зауваження 1 Зазначимо, що співвідношення (8) справджується, зокрема, у випадку, коли $M(1) = N(1) = 1$.

Розглядаючи точні нижні межі в обох частинах рівності (9) по всім можливим наборам γ_n із n натуральних чисел, робимо висновок, що точна нижня межа в правій частині (9) реалізується набором γ_n^* , який визначається співвідношенням

$$\gamma_n^* = \{i_k \in \mathbb{N} : \lambda_{i_k} = \bar{\lambda}_k, k = 1, 2, \dots, n\}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

де $\bar{\lambda} = \{\bar{\lambda}_k\}_{k=1}^\infty$ — неспадна перестановка чисел λ_k і

$$\max_{k \notin \gamma_n^*} \lambda_k = \bar{\lambda}_{n+1}.$$

З теореми 1 випливає такий наслідок.

Наслідок 1 Нехай $M(t)$ та $N(t)$ — довільні функції Орліча, що задовольняють співвідношення (7) та (8), $\mu = \{\mu_k\}_{k=1}^\infty$ — послідовність невід'ємних чисел і $\lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ — довільна послідовність додатних чисел, для яких виконуються умови (5) і (6) відповідно.

Тоді для довільного $n \in \mathbb{N}$ справджуються рівності

$$D_n(T : l_{M,\mu} \rightarrow l_{N,\mu}) = D_n(T(B_{l_{M,\mu}}), l_{N,\mu}) :=$$

$$:= \inf_{\gamma_n} E_{\gamma_n}(T : l_{M,\mu} \rightarrow l_{N,\mu}) = \bar{\lambda}_{n+1},$$

де $\bar{\lambda} = \{\bar{\lambda}_k\}_{k=1}^\infty$ — незростаюча перестановка чисел λ_k .

Величину

$$D_n(T : l_{M,\mu} \rightarrow l_{N,\mu}) = D_n(T(B_{l_{M,\mu}}), l_{N,\mu})$$

називають *базисним поперечником* множини $T(B_{l_{M,\mu}})$ в просторі $l_{N,\mu}$.

Зауважимо, що у просторах Орліча l_M , тобто якщо $\mu_k = 1$, $k = 1, 2, \dots$, відповідні результати було отримано в роботі [13]. Зазначимо також, що у випадку, коли $M(t) = t^q$ і $N(t) = t^p$, $0 < q \leq p$, $\mu_k = 1$, $k = 1, 2, \dots$, тобто, коли $l_{M,\mu} = l_q$ і $l_{N,\mu} = l_p$, твердження теореми 1 та наслідку 1 впливають відповідно з теорем 4.1 та 4.3 роботи [3].

Література

1. A. I. Stepanets (2001). Approximation characteristics of spaces S_φ^p . *Ukr. Math. J.* 53: 446-475.
2. Степанець А.И. Аппроксимационные характеристики пространств S_φ^p в разных метриках // Укр. мат. журн. – 53, № 8. – 2001. – С. 1121–1146.
3. Степанець А.И. Задачи теории приближений в линейных пространствах // Укр. мат. журн. – 58, № 1. – 2006. – С. 47–92.
4. Степанець А.И. Методы теории приближений: В 2 ч. — Київ: Праці Ін-ту математики НАН України, ч. 2. – Т. 40. – 2002. – 468 с.
5. Gao F. Exact value of the n -term approximation of a diagonal operator// J. Approx. Theory. – 162, № 4. – 2010. – P. 646–652.
6. W. Orlicz (1936). Über Räume (L^M). *Bull. Int. Acad. Polon. Sci. A*: 93–107.
7. J. Lindenstrauss and L. Tzafriri (1977). *Classical Banach spaces I*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.
8. Nakano H. Modulared Sequence Spaces / H. Nakano. – Proc. Jap. Acad. 27 reprinted in semi ordered Linear Spaces. – Tokyo. – 1955.
9. Yu.İ. Gribanov (1955). Nonlinear operators in Orlicz spaces. *Kazan. Gos. Univ. Uchen. Zap.* 115: 5–13.
10. Yu.İ. Gribanov (1957). To the theory of spaces l_M . *Kazan. Gos. Univ. Uchen. Zap.* 117: 62–65.
11. J. Lindenstrauss and L. Tzafriri (1971). On Orlicz sequence spaces. *Israel J. Math.* 10: 379–390.
12. M. Aiyub (2013). On some seminormed sequence spaces defined by Orlicz function. *Proyecciones Journal of Mathematics.* 32: 267-280.
13. A. L. Shidlich and S. O. Chaichenko, Approximative Properties of Diagonal Operators in Orlicz Spaces // Numerical Functional Analysis and Optimization. – 2015. – 36. – P. 1339 – 1352.

Stanislav O. Chaichenko, Oleksii M. Rybakov

Donbas State Pedagogical University, Sloviansk, Ukraine

Approximative Characteristics of Diagonal Operators in the Weighted Orlicz Spaces

In this paper, we study the approximation characteristics of diagonal operators in the weight sequence Orlicz spaces $l_{M,\mu}$. In particular, we found the exact values of the best approximations and the basis n – widths of certain sets of images of diagonal operators in these spaces.

Keywords: *weighted Orlycz sequence spaces, diagonal operators, best approximations, basic width.*
