

УДК 517.5

Чайченко С.О., Скорупська О.Г.¹ доктор фіз.-мат. наук, професор кафедри математики, фізики та інформатики, ДВНЗ «ДДПУ»e-mail: s.chaichenko@gmail.com,

ORCID 0000-0002-2724-8749

² здобувачка другого (магістерського) РВО за ОП «Середня освіта (Математика)», ДВНЗ «ДДПУ»e-mail: Olha.serebriakova@gmail.com,

ORCID 0009-0006-0238-6826

АПРОКСИМАЦІЙНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДІАГОНАЛЬНИХ ОПЕРАТОРІВ У ВАГОВИХ ПРОСТОРАХ ЗІ ЗМІННИМ ПОКАЗНИКОМ

В роботі досліджено апроксимаційні характеристики діагональних операторів у вагових просторах послідовностей $l_{p,\mu}$ зі змінним показником. Зокрема, знайдено точні значення величин найкращих наближень та базисного поперечника деяких множин образів діагональних операторів у цих просторах.

Ключові слова: вагові простори послідовностей зі змінним показником, діагональні оператори, найкращі наближення, базисний поперечник.

Вступ

Нехай $p = \{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ — довільна послідовність додатних чисел, що задовольняють умову

$$1 \leq p_k \leq K, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (1)$$

де K — деяка додатна стала та $\mu = \{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ — послідовність невід'ємних чисел, така що

$$1 \leq \mu_k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2)$$

Тоді, через $l_{p,\mu}$ позначимо простір всіх послідовностей $x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ дійсних чисел зі скінченною нормою Люксембурга

$$\|x\|_{l_{p,\mu}} := \inf \left\{ \alpha > 0 : \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \left| \frac{x_k}{\alpha} \right|^{p_k} \leq 1 \right\}.$$

Зазначимо, що у випадку, коли послідовність p є сталою: $p_k = p$, $k \in \mathbb{N}$, і $\mu_k = 1$, $k \in \mathbb{N}$ простори $l_{p,\mu}$ збігаються зі звичайними просторами l_p з нормою

$$\|x\|_{l_p} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{1/p},$$

якщо ж $p = \{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ — довільна послідовність чисел, що задовольняють умову (1) і $\mu_k = 1$, $k \in \mathbb{N}$, то $l_{p,1} = l_p$ і як показано в [1] (лема 2.6), має місце рівність

$$l_p = \left\{ x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty} : \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^{p_k} < \infty \right\}. \quad (3)$$

Зрозуміло, що і у ваговому випадку справджується співвідношення

$$l_{p,\mu} = \{x = \{x_k\}_{k=1}^\infty : \sum_{k=1}^\infty \mu_k |x_k|^{p_k} < \infty\}. \quad (4)$$

Простори l_p вперше були введені в математичну літературу у 1931 році в роботі Орлича [2] і останні роки відзначаються активізацією досліджень цих просторів, зокрема у працях [1], [5] – [7]. Так, у роботі [5] були встановлені необхідні та достатні умови еквівалентності норм у просторах l_p та l_q , а також умови обмеженості оператора зсуву. У праці [6] досліджено властивості оператора усереднення та максимального оператора, тоді як у роботі [7] розглянуто питання вкладень між просторами l_p .

Варто також зазначити, що результати, отримані в теорії просторів зі змінним показником, знаходять практичне застосування в таких галузях, як теорія пружності, механіка, теорія диференціальних операторів та варіаційне числення (див. [8] – [10]).

У цій роботі розглянуто діагональні оператори у вагових просторах $l_{p,\mu}$ зі змінним показником, а також досліджено окремі апроксимаційні характеристики цих операторів. Зокрема, визначено точні значення найкращих наближень і базисних поперечників для певних множин образів діагональних операторів у зазначених просторах. Отримані результати поширюють деякі твердження, отримані О.І. Степанцем у працях [11], [12] (гл. XI), [13], які стосуються просторів S_ϕ^p , на випадок апроксимації у вагових просторах $l_{p,\mu}$ зі змінним показником. Варто також відзначити, що питання апроксимаційних властивостей діагональних операторів у просторах l_p раніше розглядалися, зокрема, у працях [14] – [16]. У просторах Орлича l_p , тобто якщо $\mu_k = 1$, $k = 1, 2, \dots$, відповідні результати були отримані в роботі [19].

Основна частина

Нехай $\lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ — довільна послідовність додатних чисел, що задовольняють умову

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = 0. \quad (5)$$

Нехай, далі,

$$T : x = \{x_k\}_{k=1}^\infty \rightarrow Tx = \{\lambda_k x_k\}_{k=1}^\infty$$

— діагональний оператор, заданий на просторі $l_{p,\mu}$; $e_i = \{e_i^k\}_{k=1}^\infty$, де

$$e_i^k = \begin{cases} 0, & k \neq i, \\ 1, & k = i. \end{cases}$$

Для довільного набору γ_n із n різних натуральних чисел розглянемо

величину

$$\begin{aligned} E_{\gamma_n}(T: l_{q,\mu} \rightarrow l_{p,\mu}) &:= E_{\gamma_n}(T(Bl_{q,\mu}), l_{p,\mu}) = \\ &= \sup_{x \in Bl_{q,\mu}} E_{\gamma_n}(Tx, l_{p,\mu}) = \sup_{x \in Bl_{q,\mu}} \inf_{a_i} \|Tx - P_{\gamma_n}\|_{l_{p,\mu}} \end{aligned}$$

найкращого наближення в просторі $l_{p,\mu}$ множини $T(Bl_{q,\mu})$ за допомогою всіх можливих n -членних поліномів

$$P_{\gamma_n} = \sum_{i \in \gamma_n} a_i e_i,$$

що відповідають набору γ_n , де $Bl_{q,\mu}$ — одинична куля простору $l_{p,\mu}$, a_i — довільні дійсні числа.

Зазначимо, що коли $0 < q_k \leq p_k$, $k \in \mathbb{N}$, послідовність μ задовольняє умову (2), а послідовність λ задовольняє умову (5), для довільного $x \in Bl_{q,\mu}$ маємо $Tx \in l_{p,\mu}$ і отже, величини $E_{\gamma_n}(T: l_{q,\mu} \rightarrow l_{p,\mu})$ за таких умов мають зміст.

Дійсно, в такому випадку для довільного $x \in Bl_{q,\mu}$ всі $|x_k| \leq 1$, тому для будь-яких $0 < q_k \leq p_k$ маємо $\mu_k |x_k|^{p_k} \leq \mu_k |x_k|^{q_k}$ і

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \left| \frac{\lambda_k x_k}{\lambda^*} \right|^{p_k} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k |x_k|^{p_k} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k |x_k|^{q_k} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \left| \frac{x_k}{\|x\|_{l_{q,\mu}}} \right|^{q_k} \leq 1,$$

де $\lambda^* = \max_{k \in \mathbb{N}} \lambda_k$. Звідси випливає, що $\|Tx\|_{l_{p,\mu}} \leq \lambda^* < \infty$ і $Tx \in l_{p,\mu}$.

Теорема 1. Нехай $p = \{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ і $q = \{q_k\}_{k=1}^{\infty}$ — довільні послідовності додатних чисел, що задовольняють нерівності (1) і $q_k \leq p_k$, $k \in \mathbb{N}$; $\mu = \{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ — послідовність невід'ємних чисел і $\lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ — довільна послідовність додатних чисел, що задовольняють, умови (2) і (5) відповідно. Тоді для довільного набору γ_n із n різних натуральних чисел має місце рівність

$$E_{\gamma_n}(T: l_{q,\mu} \rightarrow l_{p,\mu}) = \max_{k \notin \gamma_n} \lambda_k. \quad (6)$$

Доведення. Оскільки для довільного $x \in l_{p,\mu}$, будь-яких $\alpha > 0$ та $a_i \in \mathbb{R}$

$$\sum_{k \in \gamma_n} \mu_k \left| \frac{x_k - a_i}{\alpha} \right|^{p_k} + \sum_{k \notin \gamma_n} \mu_k \left| \frac{x_k}{\alpha} \right|^{p_k} \geq \sum_{k \notin \gamma_n} \mu_k \left| \frac{x_k}{\alpha} \right|^{p_k},$$

то для довільного $x \in l_{p,\mu}$

$$E_{\gamma_n}(x, l_{p,\mu}) = E_{\gamma_n}(x, l_{p,\mu}) := \|x - S_{\gamma_n}(x)\|_{l_{p,\mu}} = \inf \{ \alpha > 0 : \sum_{k \notin \gamma_n} \mu_k \left| \frac{x_k}{\alpha} \right|^{p_k} \leq 1 \}, \quad (7)$$

де $S_{\gamma_n}(x) = \sum_{k \in \gamma_n} x_k e_k$.

Виберемо число $k^* \in \mathbb{N}$, $k^* = k^*(\gamma_n)$, так, щоб $\lambda_{k^*} = \max_{k \notin \gamma_n} \lambda_k$. Тоді для довільного $x \in Bl_{q,\mu}$

$$\sum_{k \notin \gamma_n} \mu_k \left| \frac{\lambda_k x_k}{\lambda_k^*} \right|^{p_k} \leq \sum_{k \notin \gamma_n} \mu_k |x_k|^{p_k} \leq \sum_{k \notin \gamma_n} \mu_k |x_k|^{q_k} \leq \sum_{k \notin \gamma_n} \mu_k \left| \frac{x_k}{\|x\|_{l_{q,\mu}}} \right|^{q_k} \leq 1.$$

Звідси випливає, що

$$E_{\gamma_n}(T: l_{q,\mu} \rightarrow l_{p,\mu}) \leq \lambda_k^* = \max_{k \notin \gamma_n} \lambda_k.$$

З іншого боку, для елементу $x^* = e_{k^*} \mu_{k^*}^{-1/p_{k^*}}$ будемо мати

$$E_{\gamma_n}(Tx^*, l_{p,\mu}) = \inf \left\{ \alpha > 0 : \mu_{k^*} \left| \frac{\lambda_{k^*}}{\mu_{k^*}^{1/p_{k^*}} \alpha} \right|^{p_{k^*}} \leq 1 \right\} = \inf \left\{ \alpha > 0 : \left| \frac{\lambda_{k^*}}{\alpha} \right|^{p_{k^*}} \leq 1 \right\} = \lambda_{k^*}^*,$$

при цьому очевидно, що $x^* \in Bl_{p,\mu}$. Отже, дійсно має місце рівність (6).

Розглядаючи точні нижні межі в обох частинах рівності (6) по всім можливим наборам γ_n із n натуральних чисел, робимо висновок, що точна нижня межа в правій частині (6) реалізується набором γ_n^* , який визначається співвідношенням

$$\gamma_n^* = \{i_k \in \mathbb{N} : \lambda_{i_k} = \bar{\lambda}_k, k = 1, 2, \dots, n\}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

де $\bar{\lambda} = \{\bar{\lambda}_k\}_{k=1}^\infty$ — незростаюча перестановка чисел λ_k і $\max_{k \notin \gamma_n^*} \lambda_k = \bar{\lambda}_{n+1}$.

З теореми 2.1 випливає такий наслідок.

Наслідок 1. Нехай $p = \{p_k\}_{k=1}^\infty$ і $q = \{q_k\}_{k=1}^\infty$ — довільні послідовності додатних чисел, що задовольняють відповідно умови (1) і $q_k \leq p_k$, $k \in \mathbb{N}$; $\mu = \{\mu_k\}_{k=1}^\infty$ — послідовність невід'ємних чисел і $\lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ — довільна послідовність додатних чисел, що задовольняють умови (2) і (5) відповідно. Тоді для довільного $n \in \mathbb{N}$

$$D_n(T: l_{q,\mu} \rightarrow l_{p,\mu}) = D_n(T(Bl_{q,\mu}), l_{p,\mu}) := \inf_{\gamma_n} E_{\gamma_n}(T: l_{q,\mu} \rightarrow l_{p,\mu}) = \bar{\lambda}_{n+1},$$

де $\bar{\lambda} = \{\bar{\lambda}_k\}_{k=1}^\infty$ — незростаюча перестановка чисел λ_k .

Величину $D_n(T: l_{q,\mu} \rightarrow l_{p,\mu}) = D_n(T(Bl_{q,\mu}), l_{p,\mu})$ називають базисним поперечником множини $T(Bl_{q,\mu})$ в просторі $l_{p,\mu}$.

У випадку, коли $1 \leq p_k \leq p^* < q^* < q_k \leq K$, $k \in \mathbb{N}$, умовою, що гарантує для довільного $x \in Bl_{q,\mu}$ включення $Tx \in l_{p,\mu}$, а отже і коректність введених вище величин $E_{\gamma_n}(T: l_{q,\mu} \rightarrow l_{p,\mu})$, є умова

$$\|\lambda\|_{l_{\frac{pq}{q-p}, \mu}} = \inf \left\{ \alpha > 0 : \sum_{k=1}^\infty \mu_k \left| \frac{\lambda_k}{\alpha} \right|^{\frac{p_k q_k}{q_k - p_k}} \leq 1 \right\} < \infty. \quad (8)$$

Дійсно, для довільних чисел $a > 0$ і $b > 0$ маємо

$$ab \leq \frac{a^s}{s} + \frac{b^{s'}}{s'}, \quad \frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = 1,$$

звідси для будь-яких $a_k > 0$ і $b_k > 0$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k^{s_k}}{s_k} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k^{s'_k}}{s'_k}, \quad \frac{1}{s_k} + \frac{1}{s'_k} = 1. \quad (9)$$

Тому якщо виконується умова (8) і $x \in Bl_{q,\mu}$, то поклавши $a_k = \mu^{(q_k - p_k)/q_k} \lambda_k^{p_k}$, $b_k = |x_k|^{p_k} \mu_k^{p_k/q_k}$, $s_k = q_k/(q_k - p_k)$, $s'_k = q_k/p_k$, з урахуванням (3) отримаємо

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k |\lambda_k x_k|^{p_k} &= \sum_{k=1}^{\infty} \mu^{(q_k - p_k)/q_k} \lambda_k^{p_k} |x_k|^{p_k} \mu_k^{p_k/q_k} \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \frac{\lambda_k^{q_k - p_k}}{q_k/(q_k - p_k)} + \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \frac{|x_k|^{q_k}}{q_k/p_k} \leq \\ &\leq \max_{i \in \mathbb{N}} \left\{ \frac{q_i - p_i}{q_i} \right\} \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \lambda_k^{q_k - p_k} + \max_{i \in \mathbb{N}} \left\{ \frac{p_i}{q_i} \right\} \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k |x_k|^{q_k} < \infty, \end{aligned}$$

тобто, $Tx \in l_{p,\mu}$.

Теорема 2. Нехай $p = \{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ і $q = \{q_k\}_{k=1}^{\infty}$ — довільні послідовності додатних чисел таких, що $1 \leq p_k \leq p^* < q_* < q_k \leq K$, $k \in \mathbb{N}$; $\mu = \{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ — послідовність невід'ємних чисел і $\lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ — будь-яка послідовність додатних чисел, що задовольняють умови (2) і (8) відповідно. Якщо для набору γ_n із $n \in \mathbb{N}$ різних натуральних чисел

$$\max_{i \notin \gamma_n} \left\{ \frac{q_i - p_i}{q_i} \right\} + \max_{i \in \gamma_n} \left\{ \frac{p_i}{q_i} \right\} = 1, \quad (10)$$

то справджується рівність

$$E_{\gamma_n}(T: l_{q,\mu} \rightarrow l_{p,\mu}) = \|\tilde{\lambda}\|_{l_{\frac{pq}{q-p},\mu}}, \quad (11)$$

де послідовність $\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}(\gamma_n) = \{\tilde{\lambda}_k\}_{k=1}^{\infty}$ така, що

$$\tilde{\lambda}_k = \begin{cases} \lambda_k, & k \notin \gamma_n, \\ 0, & k \in \gamma_n. \end{cases} \quad (12)$$

Доведення. Для спрощення записів покладемо $\|\tilde{\lambda}\| := \|\tilde{\lambda}\|_{l_{\frac{pq}{q-p},\mu}}$. З огляду

на (7) та (12) для довільного $x \in Bl_{q,\mu} \subset l_{p,\mu}$ і будь-якого $\varepsilon > 0$ розглянемо величину

$$\sum_{k \notin \gamma_n} \mu_k \left| \frac{\lambda_k x_k}{\|\tilde{\lambda}\| + \varepsilon} \right|^{p_k} = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \left| \frac{\tilde{\lambda}_k x_k}{\|\tilde{\lambda}\| + \varepsilon} \right|^{p_k}.$$

Поклавши у співвідношенні (9) $a_k = \mu^{(q_k - p_k)/q_k} \tilde{\lambda}_k^{p_k} / (\|\tilde{\lambda}\|^{p_k} + \varepsilon)$, $b_k = \mu^{p_k/q_k} |x_k|^{p_k}$, $s_k = q_k/(q_k - p_k)$ та $s_k' = q_k/p_k$, із врахуванням (10) та означення норми простору $l_{p,\mu}$ отримаємо

$$\begin{aligned} \sum_{k \notin \gamma_n} \mu_k \left| \frac{\lambda_k x_k}{\|\tilde{\lambda}\| + \varepsilon} \right|^{p_k} &\leq \sum_{k \notin \gamma_n} \frac{q_k - p_k}{q_k} \mu_k \left| \frac{\lambda_k}{\|\tilde{\lambda}\| + \varepsilon} \right|^{\frac{p_k q_k}{q_k - p_k}} + \sum_{k \notin \gamma_n} \frac{p_k}{q_k} \mu_k |x_k|^{q_k} \leq \\ &\leq \max_{i \notin \gamma_n} \left\{ \frac{q_i - p_i}{q_i} \right\} \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \left| \frac{\tilde{\lambda}_k}{\|\tilde{\lambda}\| + \varepsilon} \right|^{\frac{p_k q_k}{q_k - p_k}} + \max_{i \notin \gamma_n} \left\{ \frac{p_i}{q_i} \right\} \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k |x_k|^{q_k} \leq \\ &\leq \max_{i \notin \gamma_n} \left\{ \frac{q_i - p_i}{q_i} \right\} + \max_{i \notin \gamma_n} \left\{ \frac{p_i}{q_i} \right\} = 1, \end{aligned}$$

Звідси випливає, що для довільного $x \in Bl_{q,\mu}$ і будь-якого $\varepsilon > 0$

$$E_{\gamma_n}(Tx, l_{p,\mu}) \leq \|\tilde{\lambda}\| + \varepsilon.$$

і отже, внаслідок довільності ε

$$E_{\gamma_n}(T: l_{q,\mu} \rightarrow l_{p,\mu}) \leq \|\tilde{\lambda}\|. \quad (13)$$

З іншого боку, розглянемо послідовність $\tilde{x} = \{\tilde{x}_k\}_{k=1}^{\infty}$ таку, що

$$\tilde{x}_k = \tilde{\lambda}_k^{\frac{p_k}{q_k - p_k}} \cdot \|\tilde{\lambda}\|^{\frac{p_k}{p_k - q_k}}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Тоді

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k |\tilde{x}_k|^{q_k} = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \left| \frac{\tilde{\lambda}_k^{\frac{p_k}{q_k - p_k}}}{\|\tilde{\lambda}\|^{\frac{p_k}{q_k - p_k}}} \right|^{q_k} = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \left| \frac{\tilde{\lambda}_k}{\|\tilde{\lambda}\|} \right|^{\frac{p_k q_k}{q_k - p_k}} \leq 1,$$

тому $\|\tilde{x}\|_{l_{q,\mu}} \leq 1$ і $\tilde{x} \in Bl_{q,\mu}$. Крім цього, з огляду на означення норми простору $l_{p,\mu}$ маємо

$$\sum_{k \notin \gamma_n} \mu_k \left| \frac{\lambda_k \tilde{x}_k}{\|\tilde{\lambda}\|} \right|^{p_k} = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \left| \frac{\tilde{\lambda}_k}{\|\tilde{\lambda}\|} \cdot \frac{\tilde{\lambda}_k^{\frac{p_k}{q_k - p_k}}}{\|\tilde{\lambda}\|^{\frac{p_k}{q_k - p_k}}} \right|^{p_k} = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \left| \frac{\tilde{\lambda}_k}{\|\tilde{\lambda}\|} \right|^{\frac{p_k q_k}{q_k - p_k}} \leq 1.$$

Покажемо тепер, що

$$\inf \{ \alpha > 0 : \sum_{k \notin \gamma_n} \mu_k \left| \frac{\lambda_k \tilde{x}_k}{\alpha} \right|^{p_k} \leq 1 \} = \|\tilde{\lambda}\|. \quad (14)$$

Дійсно, якщо припустити, що при деякому $\alpha_0 = \|\tilde{\lambda}\| - \varepsilon_0 > 0$, $\varepsilon_0 > 0$, виконується нерівність

$$\sum_{k \notin \gamma_n} \mu_k \left| \frac{\lambda_k \tilde{x}_k}{\alpha_0} \right|^{p_k} \leq 1,$$

то звідси отримаємо

$$\begin{aligned}
 1 &\geq \sum_{k \notin \gamma_n} \mu_k \left| \frac{\lambda_k \tilde{x}_k}{\|\tilde{\lambda}\| - \varepsilon_0} \right|^{p_k} = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \left| \frac{\tilde{\lambda}_k}{\|\tilde{\lambda}\| (1 - \varepsilon_0 / \|\tilde{\lambda}\|)} \cdot \frac{\tilde{\lambda}_k^{\frac{p_k}{q_k - p_k}}}{\|\tilde{\lambda}\|^{\frac{p_k}{q_k - p_k}}} \right|^{p_k} = \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \left| \frac{\tilde{\lambda}_k}{\|\tilde{\lambda}\| (1 - \varepsilon_0 / \|\tilde{\lambda}\|)^{\frac{p_k}{q_k - p_k}}} \right|^{q_k - p_k} \geq \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \left| \frac{\tilde{\lambda}_k}{\|\tilde{\lambda}\| (1 - \varepsilon_0 / \|\tilde{\lambda}\|)^{\frac{q_* - p}{K}}} \right|^{q_k - p_k}.
 \end{aligned}$$

Тобто, за даного припущення при $\alpha_1 = \|\tilde{\lambda}\| (1 - \varepsilon_0 / \|\tilde{\lambda}\|)^{\frac{q_* - p}{K}} < \|\tilde{\lambda}\|$ виконується нерівність

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \left| \frac{\tilde{\lambda}_k}{\alpha_1} \right|^{\frac{p_k q_k}{q_k - p_k}} \leq 1,$$

а це суперечить тому, що $\|\tilde{\lambda}\|$ — норма послідовності $\tilde{\lambda}$ в просторі $l_{\frac{pq}{q-p}, \mu}$.

Таким чином, припущення невірне і має місце співвідношення (14). Із співвідношень (7) і (14) отримуємо

$$E_{\gamma_n}(T\tilde{x}, l_{p, \mu}) = \|\tilde{\lambda}\|_{l_{\frac{pq}{q-p}, \mu}}. \quad (15)$$

Об'єднуючи співвідношення (13) і (15), переконуємося у справедливості рівності (11). Теорему доведено.

Зазначимо, що умова (10) виконується тільки для послідовностей p і q таких, що $q_k = K_0 p_k$ для всіх $k \in \mathbb{N} \setminus \gamma_n$, де K_0 — деяка додатна стала. На жаль, в загальному випадку ми не змогли отримати відповідний результат.

Для формулювання наступного твердження припустимо, що $\lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ — довільна незростаюча послідовність невід'ємних чисел, які задовольняють умову (8). Нехай, також, $p = \{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ і $q = \{q_k\}_{k=1}^{\infty}$ — довільні неспадні послідовності додатних чисел таких, що $1 \leq p_k \leq p^* < q_* < q_k \leq K$, $k \in \mathbb{N}$, і

$$\max_{i \in \mathbb{N}} \left\{ \frac{q_i - p_i}{q_i} \right\} + \max_{i \in \mathbb{N}} \left\{ \frac{p_i}{q_i} \right\} = 1, \quad (16)$$

тобто, для довільного $k \in \mathbb{N}$ $q_k = K_0 p_k$, де K_0 — додатна стала, $K_0 > 1$. Переходячи до нижньої межі в правій частині рівності (11) по всім можливим наборам γ_n з n різних натуральних чисел, знаходимо

$$\inf_{\gamma_n} \|\tilde{\lambda}\|_{l_{\frac{pq}{q-p}, \mu}} = \|\lambda^*\|_{l_{\frac{pq}{q-p}, \mu}},$$

де послідовність $\lambda^* = \{\lambda_k^*\}_{k=1}^{\infty}$ така, що

$$\lambda_k^* = \begin{cases} 0, & k=1,2,\dots,n, \\ \lambda_k, & k > n. \end{cases} \quad (17)$$

З теореми 2.2 випливає наступний наслідок.

Наслідок 2. Нехай $\mu = \{\mu_k\}_{k=1}^\infty$ – послідовність невід’ємних чисел і $\lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ – довільна незростаюча послідовність невід’ємних чисел, що задовольняють умови (2) і (8) відповідно. Нехай, далі, $p = \{p_k\}_{k=1}^\infty$ і $q = \{q_k\}_{k=1}^\infty$ – довільні послідовності додатних чисел таких, що $1 \leq p_k \leq p^* < q_* < q_k \leq K$, $k \in \mathbb{N}$ і виконується рівність (16). Тоді для довільного $n \in \mathbb{N}$

$$D_n(T: l_{q,\mu} \rightarrow l_{p,\mu}) = \|\lambda^*\|_{l_{\frac{pq}{q-p},\mu}},$$

де послідовність $\lambda^* = \{\lambda_k^*\}_{k=1}^\infty$ визначається рівністю (17).

Зауважимо, що у просторах Орлича l_p , тобто якщо $\mu_k = 1$, $k=1,2,\dots$, відповідні результати було отримано в роботі [19]. Зазначимо, що у випадку, коли послідовності p і q є сталими ($p_k = p$, $q_k = q$, $\mu_k = 1$ для всіх $k \in \mathbb{N}$), тобто, коли $l_{p,\mu} = l_p$ і $l_{q,\mu} = l_q$, твердження наслідків 1 та 2 і теореми 2 впливають відповідно із теорем 4.3, 4.6 та 4.5 роботи [13].

Література

1. *Edmunds D. E., Nekvinda A.* Averaging operators on l_p and $L_p(x)$ // *Math. Inequal. Appl.* – **5**, № 2. – 2002 – P. 235–246.
2. *Orlicz W.* Über konjugierte Exponentenfolgen // *Studia Math.* – **3**. – 1931, – P. 200–212.
3. *Diening L., Harjulehto P., Hästö P., Růžička M.* Lebesgue and Sobolev spaces with variable exponents. – SPIN – 2010. – 502 p.
4. *Diening L., Hästö P., Nekvinda A.* Open problems in variable exponent Lebesgue and Sobolev spaces // *FSDONA 2004 Proceedings of the conference held in Milovy – May 27–June 2 – 2004.* – Mathematical Institute AS CR, Praha. – 2005.
5. *Nekvinda A.* Equivalence of l^{p_n} norms and shift operators // *Math. Inequal. Appl.* – **5**, №4. – 2002. – P. 711–723.
6. *Nekvinda A.* A note on maximal operator on l^{p_n} and $L^{p(x)}(\mathbb{R})$ // *J. Funct. Spaces Appl.* – **5**, №1. – 2007. – P. 49–88,
7. *Nekvinda A.* Imbeddings between discrete weighted Lebesgue spaces // *Math. Inequal. Appl.* – **10**, №1. – 2007. – P. 165–172
8. *Diening L., Ruzicka M.* Calderon-Zigmund operators on generalized Lebesgue spaces $L^{p(\cdot)}$ and problems related to fluid dynamics // *J. Reine Angew. Math.* – **563**. – 2003. – P. 197–220.

9. *Ruzicka M.* Electrorheological fluids: Modeling and mathematical theory, Lect. Notes Math. Springer – 2000. – **1748**. – 176 p.
10. *Samko S.G.* On a progress in the theory of Lebesgue spaces with variable exponent: Maximal and Singular operators // *Integral Transforms Spec. Funct.* – 2005. – **16**, № 5-6. – P. 461–482.
11. *Степанец А.И.* Аппроксимационные характеристики пространств S_φ^p в разных метриках // *Укр. мат. журн.* – **53**, № 8. – 2001. – С. 1121–1146.
12. *Степанец А.И.* Методы теории приближений: В 2 ч. – Київ: Праці Ін-ту математики НАН України, ч. 2. – Т. 40. – 2002. – 468 с.
13. *Степанец А.И.* Задачи теории приближений в линейных пространствах // *Укр. мат. журн.* – **58**, № 1. – 2006. – С. 47–92.
14. *Gensun F., Lixin Q.* Approximation Characteristics for Diagonal Operators in Different Computational Settings // *J. Approx. Theory.* – **140**, № 2. – 2006. – P. 178–190.
15. *Gao F.* Exact value of the n -term approximation of a diagonal operator // *J. Approx. Theory.* – **162**, № 4. – 2010. – P. 646–652.
16. *Amini A.A., Wainwright M.J.* Approximation properties of certain operator-induced norms on Hilbert spaces // *J. Approx. Theory.* – **164**, № 2. – 2012. – P. 320–345.
17. *Тухомиров В.М.* Некоторые вопросы теории приближений. – М.: Изд.-во Моск. ун-та, 1976. – 304 с.
18. *Pinkus A.* n -widths in approximation theory // Springer–Verlag. – 1985. – 291 p.
19. А.Л. Шидліч, С.О. Чайченко, Апроксимативні характеристики діагональних операторів в просторах l_p // Математичні проблеми механіки та обчислювальної математики: Зб. праць Інституту математики НАН України. – К.: Ін-т математики НАН України, 2014. – Т.11, №4. – С. 149-160.

Stanislav O. Chaichenko, Olha H. Skorupska

Donbas State Pedagogical University, Sloviansk, Ukraine

Approximative Characteristics of Diagonal Operators in the Weighted Spaces with Variable Exponent

In this paper, we study the approximation characteristics of diagonal operators in the weight sequence spaces $l_{p,\mu}$ with variable exponent. In particular, we found the exact values of the best approximations and the basis n – widths of certain sets of images of diagonal operators in these spaces.

Keywords: *weighted sequence spaces with variable exponent, diagonal operators, best approximations, basic width.*
