

УДК 37.016:514.112

Холомєєв Н.О., Кадубовський О.А.¹ здобувач другого (магістерського) РВО за ОП «Середня освіта (Математика)», ДВНЗ «ДДПУ»e-mail: holomeevnikita2@gmail.com, ORCID 0009-0000-8289-5343² кандидат фіз.-мат. наук, доцент кафедри математики, фізики та інформатики, ДВНЗ «ДДПУ»e-mail: kadubovs@ukr.net, ORCID 0000-0003-2045-810X

ПРО ГОМОТЕТІЮ ПЛОЩИНИ, ЇЇ ВЛАСТИВОСТІ ТА ЗАСТОСУВАННЯ

Стаття присвячена викладу авторського підходу до логічно впорядкованого узагальнення властивостей гомотетії площини як одного з основних перетворень подібності. Акцентовано увагу на тому, що гомотетію слід розглядати не лише як об'єкт вивчення в межах змістової лінії «Геометричні перетворення площини» шкільного курсу геометрії та освітньої компоненти «Елементарна геометрія» у педагогічних закладах вищої освіти, але й як метод доведення геометричних тверджень. З дотриманням математичної строгості систематизовано ключові властивості гомотетії, розглянуто її композиції з іншими основними перетвореннями площини та визначено основні інваріанти. Показано дидактичну ефективність гомотетії при доведенні геометричних тверджень. Окреслено методичні проблеми засвоєння цієї теми учнями в шкільному курсі та перспективи її реалізації у процесі підготовки майбутніх вчителів математики.

Ключові слова: *гомотетія, геометричні перетворення площини, подібність фігур, інваріанти, метод доведення, навчання геометрії, підготовка вчителів, дидактика.*

«Я вважаю формальну строгість обов'язковою і переконаний, що зрештою – після ґрунтовної (і зазвичай корисної для глибшого розуміння) роботи – її завжди можна поєднати (при викладенні важливих, тобто по суті простих результатів) із повною ясністю й природністю. Єдиний шлях до втілення цих ідеалів – це послідовне прагнення до логічної чіткості навіть там, де вона наразі видається обтяжливою».

А.М. Колмогоров (1958 р.)

Вступ

За «Державним стандартом базової середньої освіти» до базових знань математичної освітньої галузі для 7–9 класів віднесено «Геометричні перетворення (рухи, перетворення подібності)». Але гомотетія, як приклад перетворень подібності, в ньому навіть не згадується. Проте слід зазначити, що частиною модельних навчальних програм з геометрії для 7-9 класів «Гомотетія та її властивості» все ж таки пропонуються, принаймні в розділі «Додаткові теми».

Ось чому у сучасному курсі планіметрії «Гомотетія», як об'єкт вивчення, представлена фрагментарно, здебільшого у вигляді означення та кількох задач на побудову гомотетичних образів точок і фігур. Через що учні позбавлені можливості ознайомлення з гомотетією та її застосуваннями.

В більш вигідному положенні перебувають учні, які беруть участь у II-IV етапах Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики, за результатами розв'язування задач яких, вони мають можливість ознайомитися з авторськими розв'язками та розкрити потенціал методу геометричних перетворень і потужність гомотетії при розв'язуванні геометричних задач.

Навчальними програмами для поглибленого вивчення математики у 8-9 класах передбачено вивчення властивостей гомотетії та її застосувань до розв'язування задач. Проте вивчення гомотетії припадає на кінець 9 класу, через що фактично втрачається можливість систематизації й закріплення знань про гомотетію в подальшому навчанні, бо з 10 класу починається стереометрія. Як результат – складність засвоєння цієї теми навіть сильними учнями. Крім того, застосуванням гомотетії, традиційно, відводиться лише роль одного зі способів розв'язання задач на побудову. Не принижуючи цінність останніх та розуміючи їх важливість для геометричної освіти, вважаємо доречним звернути увагу на роботи Ленчука І.Г. [7, 8], присвячені методиці застосування перетворення подібності фігур, зокрема, гомотетії, як засобу розв'язування задач на побудову.

Актуальною навчально-методичною проблемою й до сьогодні залишається організація навчальної діяльності школярів у процесі оволодіння методами геометричних перетворень. Бо одними з головних її причин є відсутність у шкільній навчальній літературі відповідної системи задач, а також недостатня розробленість навчальних моделей методів геометричних перетворень розв'язування конструктивних задач планіметрії. [16]

Автори статті переконані у тому, що гомотетія має стати у шкільному курсі геометрії (принаймні, у класах з поглибленим вивченням математики) не лише об'єктом вивчення (як досить наочний приклад подібностей) в межах змістової лінії «Геометричні перетворення», але й ефективним засобом аналізу геометричних ситуацій та одним з основних способів доведення геометричних тверджень «методом геометричних перетворень».

Проблема теорії та методики навчання математики, яка пов'язана з вивченням геометричних перетворень учнями, полягає зокрема й в тому, що підручники практично не дають рафінованого формулювання суті методу геометричних перетворень та конструктивної схеми його використання, а також яскравої демонстрації його альтернативності та ефективності [14].

Іншим фактором, на якому наголошують автори [9], є те, що учні взагалі не знайомляться з операцією «композиція перетворень». Але ж гомотетія є унікальним перетворенням подібності, зокрема й тому, що кожне перетворення подібності є композицією гомотетії і руху.

На нашу думку, гомотетія для подібностей площини (простору) має таке ж важливе значення, як осьова симетрія (симетрія відносно площини) для рухів площини (простору). А метод геометричних перетворень, зокрема гомотетії, відіграє особливу роль й у формуванні структурного мислення, узагальненого сприйняття фігур і зв'язків між ними. Тому важливо розуміти,

що «Учні з високим рівнем розвитку інтелекту легко встановлюють взаємозв'язки між уявленнями і поняттями, тому і візуальні образи набувають абстрактного характеру, у них розвивається здатність до оперативного переходу від моделі до оригіналу, від прообразу до образу та навпаки. Для них використання символіки є органічним. Для інших учнів більш ефективним методом вивчення геометричних перетворень є конкретно-індуктивний з опорою на наочність і життєвий досвід, для них необхідна ретельно розроблена система наочних засобів навчання, інструкції щодо її самостійного виготовлення». [19]

Ще одним важливим аспектом, який (разом із наведеною перед вступом думкою А.М. Колмогорова) надихнув авторів статті на виклад запропонованого нижче матеріалу, є те, що за словами І.Ф. Шаригіна «Науковою й моральною основою курсу геометрії є принцип доказовості усіх тверджень. І це – єдиний шкільний предмет, навіть серед предметів математичного циклу, який повністю заснований на послідовному виведенні усіх тверджень. Людьми, котрі розуміють, що таке доведення, важко і навіть неможливо маніпулювати» [20, С. 17].

Тому мета статті полягає у:

- логічно структурованому викладі властивостей гомотетії;
- демонстрації можливостей гомотетії, як ефективного методу доведення геометричних тверджень;
- популяризації гомотетії, як найважливішого прикладу подібностей площини, та методу геометричних перетворень, як одного з основних методів елементарної геометрії [14].

Суть авторського підходу полягає у ретельній систематизації основних та найбільш важливих властивостей гомотетії, дослідженні композицій гомотетії і основних перетворень площини (з дотриманням належного рівня математичної строгості) та ілюстрації методичних стратегій застосування гомотетії у процесі навчання.

1. Основні поняття та попередні відомості

Означення 1.1. [10, С. 44] Якщо точки O , X і X_1 є такими, що $\overrightarrow{OX_1} = k \cdot \overrightarrow{OX}$, де $k \neq 0$, то говорять, що точка X_1 – це образ точки X при гомотетії із центром O та коефіцієнтом k . Точку O називають центром гомотетії, число k – коефіцієнтом гомотетії, $k \neq 0$.

Розглянемо фігуру F і точку O . Кожній точці X фігури F поставимо у відповідність точку X_1 , яка є образом точки X при гомотетії із центром O та коефіцієнтом k (якщо точка O належить фігурі F , то їй зіставляється сама вона). У результаті такого перетворення фігури F отримаємо фігуру F_1 . Таке перетворення фігури називають гомотетією із центром O та коефіцієнтом k і позначають H_O^k . Пишуть: $H_O^k(F) = F_1$. Також говорять, що фігура F_1 гомотетична фігурі F із центром O та коефіцієнтом k .

Твердження 1.1. (Теорема 24.1. [10, С. 222]) При гомотетії фігури F із коефіцієнтом k усі відстані між її точками змінюються в $|k|$ разів, тобто якщо A і B – довільні точки фігури F , а точки A_1 і B_1 – їх відповідні образи при гомотетії з коефіцієнтом k , то $A_1B_1 = |k| \cdot AB$.

Наслідок 1.1. ([10, С. 222]). Якщо трикутник $A_1B_1C_1$ гомотетичний трикутнику ABC із коефіцієнтом гомотетії k , то $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC$

Твердження 1.2. (Теорема 24.2. [10, С. 45]) При гомотетії фігури F образами будь-яких її трьох точок, які лежать на одній прямій, є три точки, які лежать на одній прямій, а образами трьох точок, які не лежать на одній прямій, є три точки, які не лежать на одній прямій.

Наслідок 1.2. ([10, С. 222]). При гомотетії відрізка, променя, прямої образами є відповідно відрізок, промінь, пряма. При гомотетії кута образом є кут, рівний даному. При гомотетії трикутника образом є трикутник, подібний даному.

Означення 1.2. ([10, С. 222]). Дві фігури називають подібними, якщо одну з них можна отримати з другої в результаті композиції двох перетворень: гомотетії та руху.

Твердження 1.3. (Теорема 24.3, [10, С. 223]) Відношення площ подібних багатокутників дорівнює квадрату коефіцієнта подібності.

Означення 1.3. [4, С. 252] Сукупність перетворень називають групою, якщо в цій сукупності виконуються такі властивості:

- 1) композиція будь-яких двох перетворень даної сукупності є перетворенням цієї ж сукупності;
- 2) перетворення, обернене до будь-якого перетворення даної сукупності, є перетворенням цієї ж сукупності;
- 3) серед перетворень даної сукупності є тотожне перетворення;
- 4) композиція перетворень асоціативна.

Означення 1.4. Будемо говорити, що трикутники $A_1B_1C_1$ та $A_2B_2C_2$ (на площині) мають однакову орієнтацію (різні орієнтації), якщо іменування (за абеткою) однойменних вершин трикутників відбувається в одному напрямку (в різних напрямках відповідно) за чи проти руху годинникової стрілки.

Варто зазначити, що властивості подібностей площини, зокрема гомотетії, та їх застосування досить детально і змістовно висвітлені у фундаментальних роботах Перепьолкіна Д.І. (1948 р.); Яглома І.М. (1955 р.), Шоластера М.М. (1959 р.), Яглома І.М., Атанасяна Л.С. (1963 р.), Саранцева Г.І. (1981 р.), Понаріна Я.П., Скопця З.А. (1981 р.), Готмана Е.Г., Скопця З.А. (1988 р.), Заславського О.О. (2003 р.), Понаріна Я.П. (2004 р.).

2. Основна частина

2.1. Визначення гомотетії площини та найпростіші властивості-наслідки (безпосередні наслідки з визначення гомотетії)

Означення 2.1. Гомотетією площини з центром O і коефіцієнтом k ($k \in R$, $k \neq 0$) називають таке перетворення площини (відображення площини на себе), при якому кожній точці M (площини) ставиться у відповідність така точка M' (площини), що справджується векторна рівність $\overrightarrow{OM'} = k \cdot \overrightarrow{OM}$.

Число k називають коефіцієнтом гомотетії H_O^k , точку M' – образом точки M , а точки M і M' – гомотетичними. При цьому використовують запис $M' = H_O^k(M)$ (рідше використовують й запис $H_O^k: M \rightarrow M'$).

Якщо фігура F' складається (є геометричним місцем) з гомотетичних образів усіх точок фігури F і тільки таких, то фігуру F' називають гомотетичним образом фігури F та позначають $F' = H_O^k(F)$.

Мають місце найпростіші властивості гомотетії, які є безпосередніми наслідками з визначення гомотетії (надалі, коротко, – В-Н).

В-Н 2.1.1. Образом центра O при гомотетії H_O^k , $k \neq 0$ є сама точка O .

Доведення: нехай $O' = H_O^k(O)$; тоді за визначенням гомотетії має місце векторна рівність $\overrightarrow{OO'} = k \cdot \overrightarrow{OO}$, звідки $\overrightarrow{OO'} = k \cdot \vec{0} = \vec{0} \Leftrightarrow O \equiv O'$.

В-Н 2.1.2. Образом довільної точки при гомотетії H_O^k (площини) є точка і при тому тільки одна.

Доведення: за означенням 2.1 гомотетичним образом точки є точка; нехай M – довільна, але фіксована точка площини, а M_1 та M_2 – її гомотетичні образи при гомотетії H_O^k , $k \neq 0$; тоді мають місце рівності $\overrightarrow{OM_1} = k \cdot \overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{OM_2} = k \cdot \overrightarrow{OM}$, звідки $\overrightarrow{OM_1} = \overrightarrow{OM_2} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM_1} - \overrightarrow{OM_2} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{M_2M_1} = \vec{0} \Leftrightarrow M_1 \equiv M_2$.

В-Н 2.1.3. Єдиною нерухомою точкою гомотетії H_O^k з коефіцієнтом $k \neq 1$ є центр гомотетії – точка O . Тобто, при $k \neq 1$ $H_O^k(M) = M \Leftrightarrow M \equiv O$.

Доведення: нехай $H_O^k(M) = M$, $k \neq 1$; тоді за визначенням гомотетії має місце векторна рівність $\overrightarrow{OM} = k \cdot \overrightarrow{OM}$, звідки

$$\overrightarrow{OM} - k \cdot \overrightarrow{OM} = \vec{0} \Leftrightarrow (1 - k) \cdot \overrightarrow{OM} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \vec{0} \Leftrightarrow O \equiv M.$$

В-Н 2.1.4. Гомотетія H_O^k з коефіцієнтом $k = 1$ є тотожним перетворенням площини. Тобто $H_O^1(M) = M$ для довільної точки M площини.

Доведення: за визначенням гомотетії має місце векторна рівність $\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM}$, звідки $\overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{MO} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{0} \Leftrightarrow M \equiv M'$ для довільної точки M (площини).

Зауваження 2.1.1. Нерухомими / інваріантними точками площини при гомотетії H_O^k є: кожна точка площини, якщо $k=1$; єдина точка площини – центр гомотетії, якщо $k \neq 1$.

В-Н 2.1.5. Гомотетія H_O^k з коефіцієнтом $k=-1$ є центральною симетрією з центром у точці O . Тобто $H_O^{-1}(M) = Z_O(M)$ для довільної точки M площини.

Доведення: нехай $M' = H_O^{-1}(M)$; тоді за визначенням гомотетії має місце векторна рівність $\overrightarrow{OM'} = -\overrightarrow{OM}$, звідки вектори $\overrightarrow{OM'}$ і $\overrightarrow{OM}$ – є колінеарними та протилежно напрямленими, а точка O є серединою відрізка MM' .

В-Н 2.1.6. Нехай $M' = H_O^k(M)$, $M \neq O$ та $k \neq 1$. Тоді три (попарно різні) точки O , M , M' належать одній прямій. Причому:

якщо $k < 0$, то точка O є внутрішньою точкою відрізка MM' ;

якщо $0 < k < 1$, то точка M' є внутрішньою точкою відрізка OM ;

якщо $k > 1$, то точка M є внутрішньою точкою відрізка OM' .

Доведення: нехай M – довільна точка площини, яка не співпадає із центром гомотетії, а $M' = H_O^k(M)$; оскільки $k \neq 1$ і $k \neq 0$, то точка M' не співпадає з точкою M та не співпадає з точкою O ; крім того, за визначенням гомотетії має місце векторна рівність $\overrightarrow{OM'} = k \cdot \overrightarrow{OM}$, звідки випливає, що вектори $\overrightarrow{OM'}$ та $\overrightarrow{OM}$ є колінеарними; колінеарні вектори належать або паралельним прямим, або ж одній прямій; оскільки вектори $\overrightarrow{OM'}$ та $\overrightarrow{OM}$ мають спільний початок, то належати паралельним прямим вони не можуть; звідки й випливає, що такі вектори належать одній прямій; отже, точки O , M , M' належать одній прямій.

Оскільки $\overrightarrow{OM'} = k \cdot \overrightarrow{OM}$, то $|\overrightarrow{OM'}| = |k| \cdot |\overrightarrow{OM}|$. Тому:

якщо $k > 1$, то $\overrightarrow{OM'} \uparrow \uparrow \overrightarrow{OM}$ та $OM' > OM$, звідки саме точка M є внутрішньою точкою відрізка OM' ; якщо $0 < k < 1$, то $\overrightarrow{OM'} \uparrow \uparrow \overrightarrow{OM}$ та $OM' < OM$, звідки саме точка M' є внутрішньою точкою відрізка OM ;

якщо $k < 0$, то $\overrightarrow{OM'} \uparrow \downarrow \overrightarrow{OM}$, звідки саме точка O є внутрішньою точкою відрізка MM' .

В-Н 2.1.7. Якщо $M' = H_O^k(M)$, $N' = H_O^k(N)$, де M і N – довільні (різні) точки площини, то має місце векторна рівність

$$\overrightarrow{M'N'} = k \cdot \overrightarrow{MN}. \quad (2.1.1)$$

Доведення: за визначенням гомотетії мають місце векторні рівності $\overrightarrow{OM'} = k \cdot \overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{ON'} = k \cdot \overrightarrow{ON}$, звідки $\overrightarrow{ON'} - \overrightarrow{OM'} = k \cdot \overrightarrow{ON} - k \cdot \overrightarrow{OM}$, або ж $\overrightarrow{ON'} + \overrightarrow{M'O} = k \cdot (\overrightarrow{ON} + \overrightarrow{MO})$, $\overrightarrow{M'O} + \overrightarrow{ON'} = k \cdot (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{ON})$, звідки за правилом «трикутника» додавання векторів маємо, що $\overrightarrow{M'N'} = k \cdot \overrightarrow{MN}$.

Твердження 2.1.1. Гомотетія (площини) є бієктивним (взаємно однозначним) перетворенням (площини).

Доведення. Оскільки $k \neq 0$, то з рівності (2.1.1) випливає, що $M' = N' \Leftrightarrow M = N$. Звідки й випливає, що:

- 1) різним прообразами M і N відповідають різні гомотетичні образи M' та N' відповідно;
- 2) різним гомотетичним образам M' і N' відповідають різні прообрази M та N відповідно.

Тобто, гомотетія H_O^k є бієктивним перетворенням (площини).

Твердження 2.1.2. Перетворення, обернене до гомотетії H_O^k (площини), є гомотетією з центром у точці O та коефіцієнтом $k' = \frac{1}{k}$. Тобто, $(H_O^k)^{-1} = H_O^{\frac{1}{k}}$.

Доведення. Оскільки (за твердженням 2.1.1) гомотетія H_O^k , $k \neq 0$ є бієктивним перетворенням (площини), то, як добре відомо (напр. [17]), має до себе обернене. Позначимо його через $h = (H_O^k)^{-1}$. Нехай $M' = H_O^k(M)$, тоді $h(M') = M$ та (за визначенням гомотетії) має місце рівність $\overline{OM'} = k \cdot \overline{OM}$, звідки $\overline{OM} = \frac{1}{k} \cdot \overline{OM'}$.

Для зручності введемо перепозначення $N \equiv M'$, $N' \equiv M$. Тоді перетворення h є таким, що кожній точці N (площини) ставиться у відповідність така точка N' (площини), що справджується рівність $\overline{ON'} = k' \cdot \overline{ON}$, де $k' = 1/k \neq 0$. І тому, за визначенням, $h = (H_O^k)^{-1}$ є гомотетією з центром у точці O та коефіцієнтом $k' = \frac{1}{k} \neq 0$.

Твердження 2.1.3. Гомотетія є перетворенням подібності (площини).

Доведення. Нехай $M' = H_O^k(M)$, $N' = H_O^k(N)$, де M і N – довільні (різні) точки площини. Тоді (за властивістю В-Н 2.1.7) має місце векторна рівність (2.1.1), наслідком з якої є рівність

$$|\overline{M'N'}| = |k| \cdot |\overline{MN}|, \quad k \neq 0. \quad (2.1.2)$$

Звідки й випливає, що відстань $M'N'$ між гомотетичними образами (точками M' і N') дорівнює відстані MN між їх прообразами (точками M і N), помноженій на сталу величину $|k| > 0$. І тому, за визначенням, гомотетія (площини) є подібністю (площини) з коефіцієнтом $|k| > 0$ – $H_O^k = h_{|k|}$.

Зауваження 2.1.1. Гомотетія (площини) є окремим випадком подібності (площини), коли пари відповідних точок належать прямим, що проходять через фіксовану точку O – центр гомотетії.

Зауваження 2.1.2. Зазвичай, після доведення твердження про те, що гомотетія (площини) є подібністю (площини), відбувається «переключення» на вивчення властивостей подібностей (площини), залишаючи за лаштунками вивчення властивостей, специфічних для гомотетії.

2.2. Гомотетичні образи найпростіших геометричних фігур.

Аналіз навальнo-методичної літератури з теми, нажаль, дозволяє констатувати, що навіть для перетворень подібності (площини) питання про форму образів геометричних фігур є, зазвичай, констатацією «очевидного»: «... образом відрізка є відрізок, прямої – пряма і т.д.». Звісно, що такий стан справ не може не викликати занепокоєння. Тому авторами нижче цілком свідомо наведено доведення тверджень про гомотетичні образи найпростіших геометричних фігур, на відміну від традиційного підходу, який полягає у поширенні властивостей від загального до часткового. Бо кращий спосіб вивчити та опанувати – це передовести!

Твердження 2.2.1. Якщо три точки A , B і C належать одній прямій, то їх гомотетичні образи $A' = H_O^k(A)$, $B' = H_O^k(B)$ та $C' = H_O^k(C)$ також належать одній прямій. Причому зберігається відношення «лежати між» (зберігається порядок точок на прямій).

Доведення. Нехай A , B і C належать одній прямій. Без втрати загальності (з точністю до перепозначення цих точок) можна вважати, що саме точка B лежить між точками A і C . Тоді за аксіомою вимірювання відрізків має місце рівність $AC = AB + BC$, або, що теж саме,

$$|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BC}|, \text{ звідки } |k| \cdot |\overrightarrow{AC}| = |k| \cdot |\overrightarrow{AB}| + |k| \cdot |\overrightarrow{BC}|, k \neq 0.$$

Тому, з урахуванням твердження 2.1.3 маємо, що $|\overrightarrow{A'C'}| = |\overrightarrow{A'B'}| + |\overrightarrow{B'C'}|$, або, що теж саме, $A'C' = A'B' + B'C'$. Методом від супротивного (пропонуємо самостійно обґрунтувати) не важко показати, що точки A' , B' і C' , для яких виконується рівність $A'C' = A'B' + B'C'$, належать одній прямій та, крім того, саме точка B' лежить між точками A' і C' .

Наслідок 2.2.1. При гомотетії (площини) зберігається просте відношення трьох точок прямої. Тобто, якщо A , B і C належать одній прямій та A' , B' і C' – їх відповідні гомотетичні образи, то має місце рівність

$$\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{BC}} = \frac{\overrightarrow{A'B'}}{\overrightarrow{B'C'}}.$$

Твердження 2.2.2. Якщо три точки A , B і C не належать одній прямій, то їх гомотетичні образи $A' = H_O^k(A)$, $B' = H_O^k(B)$ та $C' = H_O^k(C)$ також не належать одній прямій.

Доведення проведемо методом від супротивного, а саме припустивши, що точки A' , B' і C' належать одній прямій. Розглянемо перетворення q , обернене до гомотетії H_O^k . Тоді очевидно, що $q(A') = A$, $q(B') = B$, $q(C') = C$. Оскільки A' , B' і C' належать одній прямій та q є гомотетією (за твердженням 2.1.2), то за твердженням 2.2.1 точки A , B і C також мають належати одній прямій. Прийшли до протиріччя з умовою. І тому наше припущення про те, що A' , B' і C' належать одній прямій є неправильним. Звідки й випливає справедливність доводжуваного твердження.

Твердження 2.2.3. При гомотетії H_o^k (площини) образом відрізка AB є відрізок $A'B'$ (де $A' = H_o^k(A)$, $B' = H_o^k(B)$), причому:

- 1) гомотетичні відрізки є або паралельними, або ж належать одній прямій;
- 2) відношення їх довжин дорівнює модулю коефіцієнта гомотетії.

Доведення. Нехай AB – довільний але фіксований відрізок (площини), C – довільна, проте, фіксована внутрішня точка відрізка AB , а $C' = H_o^k(C)$, $B' = H_o^k(B)$, $A' = H_o^k(A)$.

1) Оскільки точки A, B, C належать одній прямій, то (за твердженням 2.2.1) точки A', B', C' також належать одній прямій, причому саме точка C' лежить між точками A' і B' . Тобто, точка C' є внутрішньою точкою відрізка $A'B'$. А з того що внутрішня точка відрізка AB нами обиралась довільно й впливає, що гомотетичним образом довільної внутрішньої точки відрізка AB є внутрішня точка відрізка $A'B'$.

Оскільки гомотетія є взаємно однозначним перетворенням (площини), то образом гомотетичним відрізка AB є відрізок $A'B'$.

Зауваження 2.2.1. Пояснимо сенс останнього досить поширеного у навчально-науковій літературі «очевидного висновку», який, на нашу думку, у багатьох може викликати відчуття недостатності обґрунтувань. Нами встановлено, що образами кінців відрізка AB є точки A' і B' , які не можуть співпадати, бо гомотетія є бієктивним перетворенням; образом довільної внутрішньої точки відрізка AB є певна внутрішня точка відрізка $A'B'$; розглянемо перетворення h , обернене до гомотетії H_o^k . Оскільки H_o^k є бієкцією, то $h(A') = A$, $h(B') = B$ та до гомотетії $h = (H_o^k)^{-1} = H_o^{\frac{1}{k}}$ можна застосувати результат наведеного вище пункту 1) доведення, а саме: образом довільної внутрішньої точки відрізка $A'B'$ є внутрішня точка відрізка AB . З останнього й випливає, що $H_o^k([AB]) = [A'B'] = [H_o^k(A)H_o^k(B)]$.

2) За властивістю ВН 2.1.7 має місце векторна рівність $\overrightarrow{A'B'} = k \cdot \overrightarrow{AB}$. Звідки вектори $\overrightarrow{A'B'}$ та $\overrightarrow{AB}$ є колінеарними, а тому належать або паралельним прямим, або одній прямій. Причому:

якщо центр O гомотетії H_o^k належить прямій l , яка містить відрізок AB , то (за властивістю В-Н 2.1.6) прямій l будуть належати точки A' і B' , звідки й випливає, що гомотетичні відрізки належать одній прямій;

якщо ж центр O гомотетії не належить прямій l , яка містить відрізок AB , то гомотетичні відрізки можуть належати лише паралельним прямим, бо, припустивши обернене, прийдемо до протиріччя, а саме:

– якщо припустити, що прямі AB і $A'B'$ перетинаються, то одержимо протиріччя щодо колінеарності векторів $\overrightarrow{A'B'}$ та $\overrightarrow{AB}$;

– якщо ж припустити, що прямі AB і $A'B'$ співпадають, то одержимо протиріччя із тим, що точка O не належить прямій AB .

3) Оскільки $|\overrightarrow{A'B'}| = |k| \cdot |\overrightarrow{AB}|$, то відношення довжин гомотетичних відрізків дорівнює модулю коефіцієнта гомотетії.

Справедливість наступного твердження є безпосереднім наслідком із твердження 2.2.3 та властивості В-Н 2.1.7.

Наслідок 2.2.2. При гомотетії H_O^k (площини) образом вектора $\overrightarrow{AB}$ є вектор $\overrightarrow{A'B'}$ (де $A' = H_O^k(A)$, $B' = H_O^k(B)$), причому:

якщо $k > 0$, то $\overrightarrow{AB} \uparrow \uparrow \overrightarrow{A'B'}$; якщо $k < 0$, то $\overrightarrow{AB} \uparrow \downarrow \overrightarrow{A'B'}$;

а відношення довжин таких векторів дорівнює модулю коефіцієнта гомотетії.

Справедливість наступного твердження є безпосереднім наслідком із твердження 2.2.1 та властивості В-Н 2.1.6.

Наслідок 2.2.3. При гомотетії H_O^k (площини) образом променя OB є промінь OB' (де $B' = H_O^k(B)$). Причому:

якщо $k > 0$, то промені OB та OB' співпадають;

якщо $k < 0$, то промені OB та OB' є доповняльними півпрямими.

Справедливість наступного твердження є безпосереднім наслідком із твердження 2.2.2 та наслідку 2.2.3.

Наслідок 2.2.4. При гомотетії H_O^k (площини) образом кута AOB є кут $A'OB'$ (де $A' = H_O^k(A)$, $B' = H_O^k(B)$). Причому:

якщо $k > 0$, то кути AOB та $A'OB'$ співпадають;

якщо $k < 0$, то кути AOB та $A'OB'$ є вертикальними.

Справедливість наступного твердження є безпосереднім наслідком із твердження 2.2.2 та твердження 2.2.3.

Наслідок 2.2.5. При гомотетії H_O^k (площини) образом трикутника ABC є трикутник $A'B'C'$, де $A' = H_O^k(A)$, $B' = H_O^k(B)$, $C' = H_O^k(C)$. Причому:

якщо $k = 1$, то $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$, бо $A' \equiv A, B' \equiv B, C' \equiv C$;

якщо $k \neq 1$, то $\triangle ABC$ і $\triangle A'B'C'$ є подібними з коефіцієнтом $|k| > 0$.

Наслідок 2.2.6. Гомотетичні трикутники мають однакову орієнтацію.

В справедливості твердження можна переконатися шляхом безпосередньої перевірки у трьох суттєво різних випадках.

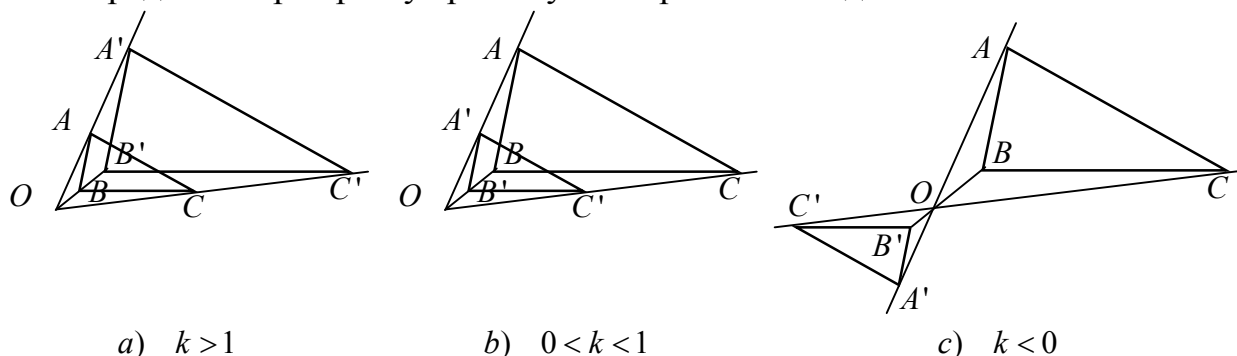


Рис. 1. До наслідку 2.2.5

Наслідок 2.2.7. При гомотетії H_o^k (площини) образом $\angle ABC \in \angle A'B'C'$, де $A' = H_o^k(A)$, $B' = H_o^k(B)$, $C' = H_o^k(C)$. Причому $\angle ABC = \angle A'B'C'$.

Для доведення достатньо на сторонах кута ABC зафіксувати точки M, N , розглянути їх гомотетичні образи M', N' та для трикутників MBN і $M'B'N'$ застосувати результат наслідку 2.2.5.

Твердження 2.2.4. Гомотетичним образом прямої l , яка проходить через центр O гомотетії H_o^k , є пряма l . Тобто, якщо $O \in l$, то $H_o^k(l) = l$.

Доведення. Нехай l – довільна пряма (площини), яка містить центр O гомотетії H_o^k , тобто $O \in l$. Зафіксуємо на прямій l такі точки A і B , щоб точка O була внутрішньою точкою відрізка AB . Тоді пряму l можна розглядати як об'єднання / сукупність доповняльних півпрямих – променів OA та OB , тобто $l \equiv [OA) \cup [OB)$. Тоді $H_o^k(l) = H_o^k([OA)) \cup H_o^k([OB))$.

Очевидно, що якщо $k=1$, то $H_o^k(l) = l$, бо кожна точка площини, зокрема прямої l , є нерухомою.

Якщо $k > 0$, то (за наслідком 2.2.3) образами променів OA та OB будуть промені OA та OB відповідно; звідки й випливає, що $H_o^k(l) = H_o^k([OA)) \cup H_o^k([OB)) = [OA) \cup [OB) = l$.

Якщо $k < 0$, то (за наслідком 2.2.3) образами променів OA та OB будуть промені OB та OA відповідно; звідки й випливає, що

$$H_o^k(l) = H_o^k([OA)) \cup H_o^k([OB)) = [OB) \cup [OA) = l.$$

Твердження 2.2.5. Гомотетичним образом прямої l , яка не проходить через центр O гомотетії H_o^k , є пряма l' , яка також не проходить через центр гомотетії та є паралельною до прямої l . Причому відношення відстаней від центра гомотетії до цих прямих дорівнює модулю коефіцієнта гомотетії.

Доведення. 1) Нехай $O \notin l$, M, N – довільні (різні) але фіксовані точки прямої l ; $M' = H_o^k(M)$, $N' = H_o^k(N)$. Тоді за властивістю ВН 2.1.7 має місце векторна рівність $\overrightarrow{M'N'} = k \cdot \overrightarrow{MN}$. Звідки вектори $\overrightarrow{M'N'}$ та $\overrightarrow{MN}$ є колінеарними, а тому належать або паралельним прямим, або одній прямій.

Якщо припустити, що вектори $\overrightarrow{M'N'}$ та $\overrightarrow{MN}$ належать одній прямій, то такою прямою може бути лише пряма l (бо M, N – точки прямої l). Але ж тоді точки M і M' належать прямій l . Більше того, за властивістю В-Н 2.1.6, прямій $MM' \equiv l$ буде належати і центр O гомотетії H_o^k . Прийшли до протиріччя з умовою. І тому наше припущення про те, що вектори $\overrightarrow{M'N'}$ та $\overrightarrow{MN}$ належать одній прямій, є неправильним. Звідки й випливає, що вектори $\overrightarrow{M'N'}$ та $\overrightarrow{MN}$ належать паралельним прямим. Оскільки M, N – різні точки, то M' та N' також є різними точками, які визначають на площині єдину пряму l' , яка, з урахуванням зазначеного вище, є паралельною до прямої l .

2) Нехай Q – довільна точка прямої l , яка не співпадає з жодною із точок M чи N , а $Q' = H_O^k(Q)$. Оскільки точки M, N і Q належать одній прямій l , то (за твердженням 2.2.1) точки M', N' та Q' також належать одній прямій – прямій l' . З іншого боку – точки O, Q і Q' (за властивістю В-Н 2.1.6) належать одній прямій. Оскільки $O \notin l$, то (очевидно, що) пряма OQ перетинає пряму l . Тому, точка Q' є точкою перетину прямих OQ та l' .

3) Нехай T – основа перпендикуляра, опущеного з точки O на пряму l . Тоді OT – відстань від точки O до прямої l . Оскільки пряма OT перетинає пряму l під прямим кутом, то (за властивістю паралельних прямих) пряма OT перетинає і пряму l' в певній точці під прямим кутом. Крім того, за пунктом 2) $OT \cap l' = T' = H_O^k(T)$. Звідки й випливає, що $|\overrightarrow{OT'}| = |k| \cdot |\overrightarrow{OT}| > 0$ – відстань від точки O до прямої l' .

Зауваження 2.2.2. Інваріантні прямі гомотетії (площини) вичерпуються прямими, які проходять через центр O гомотетії H_O^k . Тобто, $H_O^k(l) = l$ тоді і лише тоді, коли $O \in l$.

Наслідок 2.2.8. Гомотетичними образами двох паралельних прямих a і b , є паралельні (між собою) прямі a' та b' . Причому $\rho(a'; b') = |k| \cdot \rho(a; b)$, де $\rho(p; q)$ – позначення відстаї між паралельними прямими p, q .

Наслідок 2.2.9. Гомотетичними образами прямих a і b , що перетинаються у точці M , є прямі a' і b' , що перетинаються у точці M' , яка є гомотетичним образом точки M .

Наслідок 2.2.10. Міра кута між гомотетичними образами a' і b' (двох прямих a та b), що перетинаються у точці M' , дорівнює мірі кута між їх прообразами – прямими a і b , що перетинаються у точці M , яка є гомотетичним прообразом точки M' .

Твердження 2.2.6. Образом кола $\omega(C; r)$ при гомотетії H_O^k ($k \neq 1$) є також коло $\omega'(C'; r')$, причому: центри цих кіл гомотетичні – $C' = H_O^k(C)$; а відношення довжин їх радіусів дорівнює модулю коефіцієнта гомотетії.

Доведення. Нехай $\omega(C; r)$ – довільне коло (на площині), H_O^k – гомотетія з коефіцієнтом $k \neq 1$. Нехай далі $C' = H_O^k(C)$, M – довільна точка кола $\omega(C; r)$ та $M' = H_O^k(M)$. Тоді (за властивістю ВН-2.1.7) $\overrightarrow{M'C'} = k \cdot \overrightarrow{MC}$. Звідки $|\overrightarrow{M'C'}| = |k| \cdot |\overrightarrow{MC}| = |k| \cdot r$. Останнє означає, що образом довільної точки M кола $\omega(C; r)$ є така точка M' , яка відстоїть від точки $C' = H_O^k(C)$ на сталій відстані $r' = |k| \cdot r = \text{const} > 0$. Оскільки гомотетія є взаємно однозначним перетворенням (площини), то образом кола $\omega(C; r)$ в гомотетії H_O^k є коло $\omega' = \omega(H_O^k(C); |k| \cdot r)$.

З додатковими властивостями гомотетичних кіл, можна детально ознайомитися, наприклад в [4, С. 252 – 254].

2.3. Найбільш поширені способи задання гомотетії площини.

1-ий спосіб. Центром O і коефіцієнтом k (за визначенням).

Гомотетію, задану у зазначений спосіб, позначають так $H_O^k: M \rightarrow M'$.

Для розуміння / опанування **першого** способу задання гомотетії доцільно розглянути наступну

Вправа 2.3.1. X' – образ точки даної точки X ($X' \neq O$) при гомотетії H_O^k . Побудуйте точку X' , якщо:

- 1) $k = 2$; 2) $k = -2$; 3) $k = \frac{1}{2}$; 4) $k = -\frac{1}{2}$.

2-ий спосіб. Центром O і парою відповідних точок M та M' ($M' \in OM$).

Іноді, гомотетію, задану у зазначений спосіб, позначають так $H_O^{M \rightarrow M'}$.

Для розуміння / опанування **другого** способу задання гомотетії доцільно розглянути наступну

Вправа 2.3.2. Побудуйте образ N' точки N при гомотетії $H_O^{M \rightarrow M'}$, якщо:

- 1) точка O є внутрішньою точкою відрізка MM' , а точка N не належить прямій OM ;
- 2) точка O є внутрішньою точкою відрізка MM' , а точка N належить прямій OM , проте не співпадає з кінцями відрізка OM ;
- 3) точка M' є внутрішньою точкою відрізка OM , а точка N не належить прямій OM ;
- 4) точка M' є внутрішньою точкою відрізка OM , а точка N належить прямій OM , проте не співпадає з кінцями відрізка OM ;
- 5) точка M є внутрішньою точкою відрізка OM' , а точка N не належить прямій OM ;
- 6) точка M є внутрішньою точкою відрізка OM' , а точка N належить прямій OM , проте не співпадає з кінцями відрізка OM .

3-ій спосіб. Коефіцієнтом k і парою відповідних точок M та M' .

Іноді, гомотетію, задану у зазначений спосіб, позначають так $H_{M \rightarrow M'}^k$.

Для розуміння / опанування **третього** способу задання гомотетії доцільно розглянути наступну

Вправа 2.3.3. Точка X' є образом точки X при гомотетії H^k . Побудуйте центр O такої гомотетії, якщо:

- 1) $k = 2$; 2) $k = -2$; 3) $k = \frac{1}{2}$; 4) $k = -\frac{1}{2}$.

4-ий спосіб. Двома парами відповідних точок A і A' та B і B' (одною парою відповідних відрізків AB та $A'B'$)

Іноді, гомотетію, задану у зазначений спосіб, позначають так $H_{A \rightarrow A'}^{B \rightarrow B'}$.

Для розуміння / опанування **четвертого** способу задання гомотетії доцільно розглянути наступну задачу дослідницького характеру

Вправа 2.3.4. Побудувати центр O гомотетії (площини), яку задано двома парами відповідних точок ($A \rightarrow A'$, $B \rightarrow B'$) (двома відповідними відрізками).

Результати відповідного міні-дослідження можна провести та подати у наступному вигляді

I. Відрізки AB та $A'B'$ належать паралельним прямим			
$AB = A'B' \ (k =1)$		$AB \neq A'B' \ (k \neq 1)$	
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$	$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B'A'} \ (k=-1)$	$\overrightarrow{AB} \uparrow \uparrow \overrightarrow{A'B'} \ (k > 0, k \neq 1)$	$\overrightarrow{AB} \uparrow \downarrow \overrightarrow{A'B'} \ (k < 0, k \neq -1)$
$\nexists$	$O = AA' \cap BB'$	$O = AA' \cap BB'$	$O = AA' \cap BB'$

II. Відрізки AB та $A'B'$ належать одній прямій			
$AB = A'B' \ (k =1)$		$AB \neq A'B' \ (k \neq 1)$	
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$	$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B'A'} \ (k=-1)$	$\overrightarrow{AB} \uparrow \uparrow \overrightarrow{A'B'} \ (k > 0, k \neq 1)$	$\overrightarrow{AB} \uparrow \downarrow \overrightarrow{A'B'} \ (k < 0, k \neq -1)$
$\nexists$	O – середина $[AB]$, O – середина $[A'B']$	$O = AA' \cap CC'$, де: $C \notin AA'$, $C' = a \cap b$, $a \parallel AC$, $A' \in a$, $b \parallel BC$, $B' \in b$	$O = AA' \cap CC'$, де: $C \notin AA'$, $C' = a \cap b$, $a \parallel AC$, $A' \in a$, $b \parallel BC$, $B' \in b$

III. Якщо ж відрізки AB та $A'B'$ не належать паралельним прямим і не лежать на одній прямій, та такої гомотетії не існує.

5-ий спосіб. Координатними формулами (центр гомотетії співпадає з початком координат, а коефіцієнт гомотетії становить $k \neq 0$):

$$H_{(0;0)}^k : \begin{cases} x' = k \cdot x \\ y' = k \cdot y \end{cases}$$

Дійсно, якщо в площині зафіксувати прямокутну декартову систему координат xOy з початком у центрі O гомотетії H_O^k та позначити через $(x; y)$ координати довільної точки M (площини), то вектор $\overrightarrow{OM}$ буде мати координати $\{x; y\}$. Нехай далі $(x'; y')$ – координати точки $M' = H_O^k(M)$, тоді $\{x'; y'\}$ – координати вектора $\overrightarrow{OM'}$. Оскільки (за визначенням гомотетії) має місце векторна рівність $\overrightarrow{OM'} = k \cdot \overrightarrow{OM}$, то маємо, що координати $\{x'; y'\}$ вектора $\overrightarrow{OM'}$ можна знайти шляхом множення відповідних координат вектора $\overrightarrow{OM}$ на коефіцієнт гомотетії k .

Звідки й випливають рівності: $x' = k \cdot x$, $y' = k \cdot y$.

2.4. Композиції двох гомотетій, гомотетії та деяких рухів.

Твердження 2.4.1. Композиція гомотетій зі спільним центром O і коефіцієнтами k_1 та k_2 є гомотетією з тим самим центром і коефіцієнтом $k = k_1 \cdot k_2$.

Доведення. Нехай $h_1 = H_O^{k_1}$, $h_2 = H_O^{k_2}$. Розглянемо перетворення $h = H_O^{k_2} \circ H_O^{k_1} = h_2 \circ h_1$, що є композицією зазначених гомотетій. Нехай далі $M' = h_1(M)$, $M'' = h_2(M')$. Тоді (за визначенням гомотетії) мають місце векторні рівності $\overrightarrow{OM''} = k_2 \cdot \overrightarrow{OM'}$ і $\overrightarrow{OM'} = k_1 \cdot \overrightarrow{OM}$. Звідки $\overrightarrow{OM''} = k_2 \cdot k_1 \cdot \overrightarrow{OM} = (k_1 \cdot k_2) \cdot \overrightarrow{OM}$. Тому, образом довільної точки M площини відносно перетворення $h = h_2 \circ h_1$ є така точка M'' , що справджується рівність $\overrightarrow{OM''} = k \cdot \overrightarrow{OM}$. І тому, за визначенням, перетворення $h = H_O^{k_2} \circ H_O^{k_1}$ є гомотетією $H_O^{k_1 \cdot k_2}$ з центром у точці O та коефіцієнтом $k = k_1 \cdot k_2$.

Наслідок 2.4.1. Композиція гомотетій зі спільним центром є комутативною, тобто, перетворення $h_1 = H_O^{k_2} \circ H_O^{k_1}$ та $h_2 = H_O^{k_1} \circ H_O^{k_2}$ співпадають, а саме $h_1(M) = M' = h_2(M)$ для довільної точки M площини.

Наслідок 2.4.2. Композиція гомотетій зі спільним центром є асоціативною, тобто, перетворення $h_1 = (H_O^{k_3} \circ H_O^{k_2}) \circ H_O^{k_1}$ та $h_2 = H_O^{k_3} \circ (H_O^{k_2} \circ H_O^{k_1})$ співпадають, а саме $h_1(M) = M' = h_2(M)$ для довільної точки M площини.

В роботі [18] авторами статті наведено докладне доведення (з дотриманням належного рівня математичної строгості) наступного твердження

Твердження 2.4.2. Якщо центри O_1 і O_2 гомотетій $H_{O_1}^{k_1}$ та $H_{O_2}^{k_2}$ не співпадають, то

$$H_{O_2}^{k_2} \circ H_{O_1}^{k_1} = \begin{cases} H_{O_1}^{k_1}, & k_2 = 1; \quad k_1 \neq 1 \\ H_{O_2}^{k_2}, & k_1 = 1; \quad k_2 \neq 1 \\ h_0 = T_{\vec{0}}, & k_1 = k_2 = 1 \\ T_{\vec{a}}, & k_1 \cdot k_2 = 1; \quad k_i \neq 1; \quad \vec{a} = (1 - k_2) \cdot \overrightarrow{O_1 O_2} \\ H_O^{k_1 \cdot k_2}, & k_1 \cdot k_2 \neq 1; \quad k_i \neq 1; \quad O: \frac{\overrightarrow{O_1 O}}{\overrightarrow{O O_2}} = \frac{k_2 - 1}{k_2(k_1 - 1)}. \end{cases} \quad (2.4.1)$$

Зауваження 2.4.1. Цікавими та досить поширеними у застосуваннях є наступні випадки (наслідки):

1) якщо $k_1 = k_2 = -1$, то $H_{O_2}^{-1} \circ H_{O_1}^{-1} = T_{\overrightarrow{2O_1 O_2}}$;

крім того, оскільки $Z_{O_i} = R_{O_i}^{180^\circ} = H_{O_i}^{-1}$, то

$$\begin{aligned}
H_{O_2}^{-1} \circ H_{O_1}^{-1} &= Z_{O_2} \circ Z_{O_1} = R_{O_2}^{180^0} \circ R_{O_1}^{180^0} = \\
&= Z_{O_2} \circ R_{O_1}^{180^0} = R_{O_2}^{180^0} \circ Z_{O_1} = H_{O_2}^{-1} \circ Z_{O_1} = Z_{O_2} \circ H_{O_1}^{-1} = \\
&= H_{O_2}^{-1} \circ R_{O_1}^{180^0} = R_{O_2}^{180^0} \circ H_{O_1}^{-1} = T_{\overline{O_1 O_2}} = S_{l_2} \circ S_{l_1}, \quad (2.4.2)
\end{aligned}$$

де Z_{O_i} – центральна симетрія з центром в точці O_i , $R_{O_i}^{180^0}$ – поворот навколо точки O_i на кут 180^0 ; S_{l_i} – осьова симетрія з віссю l_i , яка проходить через точку O_i перпендикулярно до $O_1 O_2$;

$$2) \quad \text{якщо } k_2 = 2, k_1 = 1/2, \text{ то } H_{O_2}^2 \circ H_{O_1}^{1/2} = T_{\overline{-O_1 O_2}} = T_{\overline{O_2 O_1}}; \quad (2.4.3)$$

$$3) \quad \text{якщо } k_1 = 2, k_2 = 1/2, \text{ то } H_{O_2}^{1/2} \circ H_{O_1}^2 = T_{\overline{\frac{1}{2} O_1 O_2}}. \quad (2.4.4)$$

Для розуміння / опанування Твердження 2.4.2. доцільно розглянути, наприклад, такі питання:

1. За якої аналітичної умови композиція $h = H_{O_2}^{k_2} \circ H_{O_1}^{k_1}$ двох гомотетій з різними центрами не є гомотетією чи паралельним перенесенням?
2. За яких умов композиція двох гомотетій з різними є комутативною, тобто, коли $H_{O_2}^{k_2} \circ H_{O_1}^{k_1} = H_{O_1}^{k_1} \circ H_{O_2}^{k_2}$?

Зауваження 2.4.2. Гомотетію H_O^k з від'ємним коефіцієнтом $k < 0$ зручно розглядати як композицію центральної симетрії з центром у точці O та гомотетії з додатним коефіцієнтом $|k|$, або ж навпаки. Тобто

$$H_O^{-|k|} = H_O^{|k|} \circ Z_O = Z_O \circ H_O^{|k|}. \quad (2.4.5)$$

Твердження 2.4.3. Композиція гомотетії H_O^k ($k \neq 1$) та паралельного перенесення $T_{\vec{a}}$ ($\vec{a} \neq \vec{0}$) є гомотетією з таким самим коефіцієнтом гомотетії але центром в іншій точці O^* , положення якої відносно точки O можна визначити за допомогою векторної рівності $\overrightarrow{OO^*} = \frac{1}{1-k} \cdot \vec{a}$.

Доведення.

1) Проведемо через точку O пряму l паралельно до вектора $\vec{a}$. Нехай N – довільна, але фіксована точка прямої l , яка не співпадає з точкою O . Нехай далі $N_1 = H_O^k(N)$, $N' = T_{\vec{a}}(N_1)$. Тоді N' – образ точки N відносно композиції $h = T_{\vec{a}} \circ H_O^k$. Більше того, оскільки $l \parallel \vec{a}$, то всі чотири точки O , N , N_1 та N' належать прямій l . Розглянемо точку M , яка не належить l . І нехай $M_1 = H_O^k(M)$, $M' = T_{\vec{a}}(M_1)$. Тоді M' – образ точки M відносно композиції $h = T_{\vec{a}} \circ H_O^k$. Нехай $O' = T_{\vec{a}}(O)$. Оскільки $H_O^k(O) = O$, то O' – образ точки O відносно композиції $h = T_{\vec{a}} \circ H_O^k$ – рис. 2 нижче.

2) Оскільки $k \neq 1$, то точки M і M_1 не співпадають, а з того що $M' = T_a^-(M_1)$, $N' = T_a^-(N_1)$ маємо, що прямі M_1M' та $N_1N' \equiv l$ є паралельними. Очевидно, що пряма MM' перетинає пряму M_1M' (в точці M'), а тому (за властивістю паралельних прямих) пряма MM' перетинає і пряму l в деякій точці O^* .

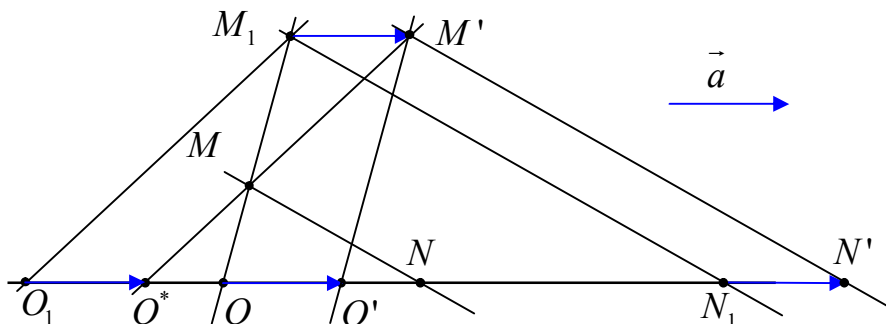


Рис. 2. До доведення твердження (на випадок $k > 1$)

3) Оскільки $N_1 = H_O^k(N)$, $M_1 = H_O^k(M)$ та $O \notin MN$, то $M_1N_1 \parallel MN$. З іншого боку, оскільки $N' = T_a^-(N_1)$, $M' = T_a^-(M_1)$, то $\overrightarrow{M_1M'} = \vec{a} = \overrightarrow{N_1N'}$. Тому (за ознакою) чотирикутник $N_1M_1M'N'$ є паралелограмом, звідки $N_1M_1 \parallel N'M'$. І тому (за властивістю паралельних прямих) прямі NM та $N'M'$ є паралельними. Звідки (за теоремою Фалеса) справджується рівність

$$\frac{\overrightarrow{O^*M'}}{\overrightarrow{O^*M}} = \frac{\overrightarrow{O^*N'}}{\overrightarrow{O^*N}} = k'. \quad (2.4.6)$$

З іншого боку – з подібності трикутників $O^*M'N'$, O^*MN та векторної рівності $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{M_1N_1}$ – маємо, що

$$k' = \frac{\overrightarrow{O^*M'}}{\overrightarrow{O^*M}} = \frac{\overrightarrow{M'N'}}{\overrightarrow{MN}} = \frac{\overrightarrow{M_1N_1}}{\overrightarrow{MN}}. \quad (2.4.7)$$

Оскільки $N_1 = H_O^k(N)$, $M_1 = H_O^k(M)$, то за властивістю В-Н 2.1.7 маємо, що

$$k' = \frac{\overrightarrow{O^*M'}}{\overrightarrow{O^*M}} = \frac{\overrightarrow{M_1N_1}}{\overrightarrow{MN}} = k. \quad (2.4.8)$$

З урахуванням співвідношень (2.4.6) – (2.4.8), виконуються векторні рівності

$$\frac{\overrightarrow{O^*M'}}{\overrightarrow{O^*M}} = \frac{\overrightarrow{O^*N'}}{\overrightarrow{O^*N}} = k' = k. \quad (2.4.9)$$

Оскільки точки N ($N \in l$) і M ($M \notin l$) обирались на площині довільно та для них виконуються рівності (2.4.9), то (за визначенням) перетворення $h = T_a^- \circ H_O^k$ є гомотетією з центром у точці O^* та коефіцієнтом k .

4) Нехай $O_1 = H_O^k(O^*)$. Тоді (за твердженням 2.2.5) $O^*M \parallel O_1M_1$. Тому за визначенням чотирикутник $O_1M_1M'O^*$ є паралелограмом. Звідки має місце

рівність $\overrightarrow{O^*O_1} = \overrightarrow{M'M_1} = -\vec{a}$. З іншого боку справджується рівність $\frac{\overrightarrow{OM_1}}{\overrightarrow{OM}} = \frac{\overrightarrow{OO_1}}{\overrightarrow{OO^*}} = k$ (бо $O_1 = H_O^k(O^*)$, $M' = T_a^-(M_1)$). Тому маємо, що $\overrightarrow{OO^*} + \overrightarrow{O^*O_1} = k \cdot \overrightarrow{OO^*} \Rightarrow \overrightarrow{OO^*} - \vec{a} = k \cdot \overrightarrow{OO^*} \Rightarrow \overrightarrow{OO^*} - \vec{a} = k \cdot \overrightarrow{OO^*} \Rightarrow \overrightarrow{OO^*}(1-k) = \vec{a}$. Звідки й випливає, що (при $k \neq 1$) $\overrightarrow{OO^*} = \frac{1}{1-k} \cdot \vec{a}$.

Крім того, не важко переконатися у тому, що $O^* = T_a^-(O_1)$, звідки й випливає, що O^* – нерухома точка композиції $h = T_a^- \circ H_O^k$, $k \neq 1$.

Зауваження 2.4.3. Після ознайомлення з наведеним доведенням твердження (унаочненого рис. 2 для випадку $k > 1$) доцільно запропонувати провести аналогічні дослідження для двох випадків: $0 < k < 1$; $k < 0$.

Задача 2.4.1. Доведіть, що композиція паралельного перенесення $T_{\vec{b}}$ ($\vec{b} \neq \vec{0}$) і гомотетії $H_O^{k'}$ ($k' \neq 1$) є гомотетією з таким самим коефіцієнтом гомотетії але центром в іншій точці O^* , положення якої відносно точки O можна визначити за допомогою векторної рівності $\overrightarrow{OO^*} = \frac{k'}{1-k'} \cdot \vec{b}$.

Розв'язання. За доведеним твердженням 2.4.2, маємо, що $T_a^- \circ H_O^k = H_{O^*}^k$. Звідки $(T_a^- \circ H_O^k)^{-1} = (H_{O^*}^k)^{-1} = H_{O^*}^{\frac{1}{k}} = H_{O^*}^{k'}$, де $k' = 1/k$. Оскільки $(T_a^- \circ H_O^k)^{-1} = (H_O^k)^{-1} \circ (T_a^-)^{-1} = H_O^{\frac{1}{k}} \circ T_{-\vec{a}} = H_O^{k'} \circ T_{\vec{b}}$, то маємо такий результат $H_O^{k'} \circ T_{\vec{b}} = H_{O^*}^{k'}$. Звідки й випливає справедливність основної частини доводжуваного твердження. За доведеним вище, має місце рівність $\overrightarrow{OO^*} = \frac{1}{1-k} \cdot \vec{a}$. Звідки $\overrightarrow{OO^*} = \frac{\frac{1}{k}}{\frac{1}{k}-1} \cdot (-\vec{b}) = \frac{k'}{1-k'} \cdot \vec{b}$.

Означення 2.4.1. Гомотетичним поворотом (або поворотною гомотетією) називають композицію гомотетії H_O^k та повороту R_O^φ зі спільним центром.

Добре відомо [17], що композиція гомотетії і повороту зі спільним центром є комутативною, тобто $R_O^\varphi \circ H_O^k = H_O^k \circ R_O^\varphi$.

Більше того – довільна подібність (площини) першого роду, яка не є гомотетією чи рухом, є гомотетичним поворотом [13, 17].

Більш детально з властивостями та застосуваннями гомотетичного повороту можна ознайомитися в [2, 24].

Означення 2.4.2. Гомотетичною симетрією називають композицію осьової симетрії та гомотетії, центр якої належить осі симетрії.

Добре відомо [17], що композиція осьової симетрії та гомотетії, центр якої належить осі симетрії, є комутативною, тобто $S_l \circ H_O^k = H_O^k \circ S_l$, $O \in l$.

Більше того – довільна подібність (площини) другого роду, яка не є рухом, є гомотетичною симетрією [13, 17].

2.5. Про застосування «методу гомотетії» («методу геометричних перетворень») до розв'язання геометричних задач на доведення.

Добре відомо (напр., [1, С. 24]), що властивості геометричних перетворень використовуються ефективно до розв'язування задач лише тоді, коли учні вміють:

- 1) будувати геометричні фігури при конкретних видах перетворень;
- 2) визначати вид перетворення за окремими елементами геометричних фігур;
- 3) встановлювати (обчисленням, побудовою) положення відповідних точок при певному виді перетворення.

Для формування цих умінь доцільно використовувати задачі на побудову, які умовно можна поділити на дві групи: 1) побудова відповідних точок при заданому геометричному перетворенні; 2) побудова фігури, для якої відповідне перетворення треба знайти.

Суть методу геометричних перетворень для доведення геометричних тверджень наведемо з урахуванням усталених підходів теорії перетворень [17], проте в редакції авторів:

Нехай для геометричної фігури F' необхідно встановити справедливості певної властивості f / декількох властивостей $f_1, \dots, f_n$;

якщо відомо або встановлено (зокрема за допомогою додаткових побудов та відповідних обґрунтувань), що фігура F' є образом (при перетворенні h , існування якого, до речі, ще треба встановити) фігури F , яка:

– або (за умовою) має властивість f / властивості $f_1, \dots, f_n$, що є інваріантами перетворення h (властивості зберігаються для образів та прообразів при перетворенні h)

– або ж для фігури F це показати не складно та наведено відповідні обґрунтування,

то (наслідуючи теорію геометричних перетворень) справедливості твердження (для фігури F') вважають доведеним.

Ось чому важливим є знання інваріантів геометричних перетворень. Слід зауважити, що у шкільному курсі математики інваріанти перетворень прийнято називати «властивостями фігур, що зберігаються».

Для подібностей площини, а тому і для гомотетії площини, зазначені інваріанти досить детально висвітлені в навчально-методичній літературі. А саме – при перетвореннях подібності площини (для образів і прообразів) зберігаються такі властивості: кут між прямими; відношення довжин відрізків; приналежність трьох точок одній прямій; відношення «лежати між»; просте відношення трьох точок; паралельність відрізків / прямих; інцидентність (приналежність) точок і прямих.

Слід також відзначити, що метод подібності (зокрема гомотетії) є досить дієвим та потужним методом доведення тверджень про:

- приналежність трьох точок одній прямій;
- перетин трьох прямих / відрізків в одній точці;
- відношення довжин відрізків.

Проте для дієвого та повноцінного застосування методу подібності (площини) до розв'язання геометричних задач необхідно вирішувати питання щодо існування подібності площини, при якій образом однієї фігури є інша. Через те що подібність площини (в загальному випадку) є композицією гомотетії та певного руху площини, а в шкільному курсі геометрії композиції перетворень майже не вивчаються, виникає природна «складність» через неможливість переконатися в існуванні потрібної подібності. Зазвичай, цю ситуацію вирішують шляхом застосування означення та основних властивостей подібних фігур (многокутників).

Виділяючи специфіку гомотетії, слід відзначити таке:

- 1) гомотетія є окремим випадком подібності (площини), коли пари відповідних точок належать прямим, що проходять через фіксовану точку – центр гомотетії;
- 2) при застосуванні гомотетії природно використовувати саме векторний метод досліджень, який дозволяє обґрунтування зробити більш лаконічними та позбавляє необхідності розглядати певні випадки взаємного розташування.
- 3) доведення / перевірка існування гомотетії, при якій образом однієї фігури є інша, для здобувачів освіти є більш наочною та зрозумілішою у порівнянні з питанням про існування необхідної подібності.

Крім того, автори переконані, що для ефективного застосування методу гомотетії до доведення геометричних тверджень здобувачам освіти не вистачає поміркованої системи саме ключових задач, які б дозволили навчитися «відчувати» можливість принципового використання гомотетії.

Досвід розв'язування задач на застосування гомотетії дозволяє авторам запропонувати наступну низку задач, які можуть бути ключовими задачами для методу гомотетії, зокрема й у шкільному курсі геометрії.

КЗ №1. Нехай C – середина відрізка AB . Тоді $C' = H_O^k(C)$ є серединою відрізка $A'B'$, де $A' = H_O^k(A)$, $B' = H_O^k(B)$.

КЗ №2. Якщо $\vec{a}', \vec{b}', \vec{c}'$ – гомотетичні образи векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ в гомотетії H_O^k , то мають місце векторні рівності

$$k = \frac{\vec{a}'}{\vec{a}} = \frac{\vec{b}'}{\vec{b}} = \frac{\vec{c}'}{\vec{c}} = \frac{\vec{a}' + \vec{b}'}{\vec{a} + \vec{b}} = \frac{\vec{a}' - \vec{b}'}{\vec{a} - \vec{b}} = \frac{\vec{a}' + \vec{b}' + \vec{c}'}{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}} = \frac{\vec{a}' + \vec{b}' - \vec{c}'}{\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}} = \dots$$

КЗ №3. Нехай A_0 , B_0 і C_0 – середини сторін BC , AC та AB (відповідно) трикутника ABC , M – точка перетину медіан AA_0 , BB_0 і CC_0 . Тоді:

- 1) $H_M^{-\frac{1}{2}}(\triangle ABC) = \triangle A_0B_0C_0$; 2) $H_M^{-2}(\triangle A_0B_0C_0) = \triangle ABC$. [4, С. 297-298]

КЗ №4. Пряма l не містить центр гомотетії H_O^k , точка $M \in l$, а пряма m проходить через т. $M' = H_O^k(M)$ паралельно до прямої l . Тоді $H_O^k(l) = m$.

КЗ №5. Якщо три прямі a, b, c перетинаються у точці M , то прямі $a' = H_O^k(a)$, $b' = H_O^k(b)$ і $c' = H_O^k(c)$ перетинаються у точці $M' = H_O^k(M)$.

КЗ №6. Нехай пряма l дотикається кола ω у точці T . Тоді пряма $l' = H_O^k(l)$ дотикається кола $\omega' = H_O^k(\omega)$ у точці $T' = H_O^k(T)$.

КЗ №7. Нехай кола ω_1 та ω_2 дотикаються внутрішнім (зовнішнім) чином у точці T . Тоді кола $\omega'_1 = H_O^k(\omega_1)$ та $\omega'_2 = H_O^k(\omega_2)$ дотикаються внутрішнім (відповідно зовнішнім) чином у точці $T' = H_O^k(T)$.

КЗ №8. Нехай AD і BC – паралельні відрізки (належать паралельним прямим) різної довжини. Тоді відрізки AD і BC є гомотетичними з центрами гомотетій у точках M (перетину прямих AC і BD) і N (перетину прямих AB і CD) та протилежними за знаком коефіцієнтами гомотетій. Звідки (з урахуванням КЗ №1) й випливає, що точки M , N та середини відрізків AD і BC належать одній прямій.

Зауважимо, що наведена нижче добірка задач та розбиття їх на типи є досить суб'єктивними, а сама ж добірка – далеко не повною системою задач. Маємо на увазі геометричні твердження, при доведенні яких доцільно і більш раціонально використовувати саме композицію гомотетій або ж композицію гомотетії і певного руху площини. Основна мета – продемонструвати можливості застосування гомотетії площини для доведення геометричних тверджень із зазначенням джерел, в яких містяться їх повноцінні доведення.

Трикутник

1. Довести, що медіани трикутника перетинаються в одній точці, яка ділить кожную з них, рухаючись від вершини, у відношенні 2:1. [23, С. 48]
 2. Медіани AA_0 , BA_0 і CC_0 трикутника ABC перетинаються у точці M ; P – довільна точка (площини трикутника). Пряма l_a проходить через точку A паралельно прямій PA_0 ; прямі l_b і l_c визначаються аналогічно. Доведіть, що: 1) прямі l_a , l_b і l_c перетинаються в одній точці Q ; 2) точка M лежить на відрізку PQ , причому $PM : MQ = 1 : 2$. [13, С. 356, 363]
 3. Доведіть, що три прямі, проведені через середини сторін нерівнобедреного трикутника паралельно до бісектрис протилежних кутів, перетинаються в одній точці.
 4. На стороні AB $\triangle ABC$ від його вершин A і B відкладено відрізки AM і BN однакової довжини $h < \frac{1}{2}AB$. Через точки M і N проведено прямі m і n паралельно до сторін AC і BC відповідно. Доведіть, що точка перетину прямих m і n належить медіані CC_0 трикутника ABC .
 5. Доведіть що висоти (або ж їх продовження) довільного трикутника перетинаються в одній точці. [23, С. 49]
 6. Доведіть, що в нерівносторонньому трикутнику ABC центр O описаного навколо трикутника кола, точка G перетину його медіан та точка H перетину висот (або ж їх продовжень) належать одній прямій, причому $GH = 2OG$. [4, С. 295-296], [15, С. 23, 54], [23, С. 49]
- Пряму, яка містить точки O, G, H , називають прямою Ейлера.*

7. Доведіть, що відстань від вершини (непрямого) кута трикутника до (ортоцентра) точки перетину його висот вдвічі більша за відстань від центра описаного кола до сторони, протилежної зазначеному куту. [5, С. 95-96], [3, С. 107], [4, С. 301]
8. Нехай M_0 – довільна точка площини $\triangle ABC$ і A_1, B_1, C_1 – точки, які симетричні точці M_0 відносно середин сторін BC , CA і AB . Довести, що відрізки AA_1, BB_1, CC_1 перетинаються в одній точці, яка ділить ці відрізки навпіл і $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$. [15, С. 53]

Трикутник і кола

9. Відрізки AA_1 , BB_1 і CC_1 – висоти гострокутного трикутника ABC . Доведіть, що радіус описаного кола трикутника ABC вдвічі більший за радіус описаного кола трикутника $A_1B_1C_1$. [11, С. 146]
10. Висоти $\triangle ABC$ перетинаються в точці H . Довести, що коло, яке проходить через основи висот, ділить відрізки AH , BH і CH навпіл.
11. У трикутнику ABC кут C прямий. Довести, що при гомотетії з центром C і коефіцієнтом $k=2$ вписане коло переходить у коло, яке дотикається до описаного кола. [15, С. 82]
12. Доведіть, що основи перпендикулярів, опущених із точки, яка належить описаному навколо трикутника колу, на прямі, що містять його сторони, належать одній прямій (*прямій Симсона трикутника*). [4, С. 298]
13. Нехай O_1 , O_2 , O_3 – образи точки O – центра описаного навколо $\triangle ABC$ кола відносно сторін BC , CA , AB . Довести, що $\triangle O_1O_2O_3$ дорівнює $\triangle ABC$ і має з ABC спільне коло Ейлера (*Задача Карно*). [6, С. 201]
14. Якщо деяке коло дотикається до заданого кола і його хорди, то пряма, що з'єднує точки дотику, проходить через середину дуги, що стягується хордою. [6, С. 320-321]
15. Коло внутрішньо дотикається до кола, описаного навколо рівнобедреного $\triangle ABC$, а також рівних сторін AB і AC цього трикутника в точках P і Q відповідно. Доведіть, що середина відрізка PQ є центром кола, вписаного в трикутник ABC . [6, С. 317]
16. Доведіть, що в довільному трикутнику середини сторін, основи висот та середини відрізків, які сполучають ортоцентр трикутника з його вершинами, належать одному колу з центром в середині відрізка, кінцями якого є центр описаного кола та ортоцентр, та радіусом рівним половині радіуса описаного кола трикутника. [4, С. 295], [15, С. 55]
Це коло називають колом дев'яти точок трикутника. Також добре відомо (теорема Фейєрбаха), що коло дев'яти точок трикутника дотикається його вписаного кола та трьох його зовнішписаних кіл.
17. Нехай H – точка перетину висот гострокутного $\triangle ABC$. Коло ω з діаметром AH та коло, описане навколо $\triangle BHC$, перетинаються в точці $P \neq H$. Довести, що пряма AP проходить через середину BC . [22, С. 95]

Чотирикутники, трапеція

18. Доведіть, що точки, симетричні до довільної точки (площини) відносно середин сторін довільного (опуклого) чотирикутника, є вершинами паралелограма. [4, С. 299]
19. Доведіть, що точки, симетричні до довільної точки (площини) відносно середин сторін квадрата, є вершинами деякого квадрата. [13, С. 355]
20. Продовження бічних сторін AB і CD трапеції $ABCD$ перетинаються у точці K , а її діагоналі – у точці L . Доведіть, що точки K , L , M і N , де M і N – середини основ BC і AD , належать одній прямій. [13, С. 356, 362], [4, С. 292-293], [23, С. 48]
21. Точка перетину діагоналей трапеції рівновіддалена від прямих, які містять її бічні сторони. Доведіть, що трапеція є рівнобедреною. [13, С. 362]
22. Через точку перетину діагоналей трапеції проведено пряму паралельно до основ трапеції. Доведіть, що відрізок цієї прямої, обмежений бічними сторонами трапеції, ділиться точкою перетину діагоналей навпіл.
23. У трапеції відрізок, що сполучає середину однієї основи з кінцем другої основи, перетинає діагональ у точці M . Довести, що на прямій, проведеній через точку M паралельно основам, діагоналі відсікають рівні відрізки. [4, С. 296]

Два кола, що дотикаються

24. Два кола дотикаються у точці K . Пряма, що проходить через точку K , перетинає ці кола у точках A і B . Доведіть, що дотичні до кіл, проведені через точки A і B , паралельні. [13, С. 355]
25. Два кола дотикаються у точці K . Через точку K проведено дві прямі, що перетинають перше коло у точках A і B , друге – у точках C і D . Доведіть, що: $AB \parallel CD$; $\triangle KAB \sim \triangle KCD$. [13, С. 355], [21, С. 129]
26. Коло S дотикається до рівних сторін AB і BC рівнобедреного трикутника ABC у точках P і K , а також дотикається всередині до описаного кола трикутника ABC . Доведіть, що середина відрізка PK є центром вписаного кола трикутника ABC . [13, С. 356, 363]
27. Рівні кола S_1 і S_2 дотикаються кола S внутрішнім чином в т-х A_1 і A_2 . Довільну т-ку C кола S з'єднано відрізками з т-ми A_1 і A_2 . Ці відрізки перетинають S_1 і S_2 в т-х B_1 і B_2 . Доведіть, що $A_1A_2 \parallel B_1B_2$. [21, С. 130]
28. Два кола дотикаються внутрішньо в точці A . Січна перетинає кола в точках M, N, P, L , розміщених послідовно. Довести, що кути MAP і NAL рівні. [4, С. 303-304]
29. Два кола дотикаються зовнішньо. Пряма перетинає ці кола в точках M, N, P, L , розміщених послідовно. Довести, що з точки дотику відрізки ML і NP видно під кутами, сума яких дорівнює 180° . [4, С. 304-305]
30. Якщо кола ω_1 та ω_2 дотикаються внутрішнім чином у точці A і MN – хорда кола ω_1 , яка дотикається ω_2 в точці K , то AK – бісектриса кута MAN . [23, С. 77-78]

Наслідки, рекомендації та прикінцеві зауваження

В контексті реалізації *теоретико-групового підходу до вивчення геометрії* у процесі навчання майбутніх вчителів / викладачів математики увагу студентів слід звернути на твердження

Теорема. Сукупність усіх гомотетій площини зі спільним центром є групою.

Справедливість твердження (за означення 1.5) є звичайною перевіркою наявності відповідних (та доведених вище) властивостей гомотетії, а саме: Твердження 2.4.1; Твердження 2.1.2; властивість В-Н 2.1.4; Наслідок 2.4.2.

Після детального розгляду основних властивостей гомотетії та опанування різних способів її задання, доцільно запропонувати таку низку питань для організації самостійної роботи здобувачів освіти:

I. Скільки існує гомотетій, при яких:

- образом даної точки A є дана точка B ? (Розглянути випадки, коли точки співпадають / не співпадають);
- різні точки A і B є гомотетичними при гомотетії з центром в точці O ?
- образом даної точки A є дана точка B при гомотетії з центром в точці O ?
- образом даної прямої a є дана пряма b (Розглянути три випадки, коли прямі: співпадають, є паралельними; перетинаються)?
- образом даного променя AM є даний промінь BN (Розглянути всі можливі випадки)?
- образом даного кута $\angle ABC$ є даний кут $\angle A'B'C'$, сторони якого відповідно паралельні до сторін $\angle ABC$?

II. Два трикутники (многокутники) є гомотетичними з коефіцієнтом k . Чому дорівнює відношення їх периметрів, площ? Два кола є гомотетичними з коефіцієнтом k . Чому дорівнює відношення їх довжин, площ?

Слід відзначити, що за лаштунками наведеного матеріалу залишаються не менш цікаві і важливі питання, наприклад, пов'язані з вивченням додаткових властивостей гомотетичних фігур, зокрема взаємним розташування центрів гомотетії попарно гомотетичних фігур, та питання існування гомотетії, при якій образом однієї з подібних фігур є інша.

Автори переконані, що теоретико-дидактичне забезпечення теми «Гомотетія» без традиційних «очевидностей» та в поєднанні з виваженою системою ключових задач дозволить здобувачам освіти свідомо опанувати й ефективно застосовувати метод гомотетії для проведення більш лаконічних доведень геометричних тверджень, зокрема шкільного курсу геометрії.

Враховуючи традиційне календарне планування вивчення «Гомотетії» (наприкінці 9 класу), більш ніж доцільним є її повторення та застосування у курсі стереометрії. Наприклад: при аналізі подібних перерізів; задач на подібність у просторі тощо. Також дидактичне забезпечення теми доцільно збагатити вправами і задачами, в яких фігури «неочевидно» подібні, але пов'язані через «приховану» гомотетію.

Висновки

В статті авторами запропоновано один з можливих підходів до вивчення гомотетії площини та наведено рекомендації щодо застосування методу гомотетії до доведення геометричних тверджень. Теоретичний супровід реалізовано за допомогою мінімальної кількості означень, 7 властивостей-наслідків (безпосередніх наслідків з визначення гомотетії) і 9 тверджень із доведеннями, 12 безпосередніх наслідків та низки зауважень, спрямованих на більш свідоме засвоєння матеріалу. Крім того, авторами виокремлено 8 ключових задач для використання методу гомотетії до доведення геометричних тверджень та запропоновано 30 таких задач із зазначенням джерел, в яких містяться повноцінні доведення цих тверджень.

Автори переконані, що поглиблене вивчення гомотетії не лише сприяє формуванню більш сучасного й концептуально обґрунтованого уявлення про зміст геометрії як навчального предмету, а й відкриває нові способи розв'язування геометричних задач, що має суттєве значення як для самої геометрії, так і для її практичних застосувань. Бо використання гомотетії як методу розв'язання геометричних задач є ефективним дидактичним засобом, що дозволяє не лише краще зрозуміти поняття подібності, але й опанувати більш гнучкі підходи до доведення геометричних тверджень.

Маємо сподівання, що наведений матеріал:

- буде цікавим вчителям математики та стане корисним студентам педагогічних ЗВО при вивченні перетворень площини, їх застосувань при розв'язанні геометричних задач та доведенні геометричних тверджень;
- знайде належне місце не лише в шкільному курсі геометрії (принаймні, у класах з поглибленим вивченням математики), й в курсах з методики навчання математики для підготовки майбутніх вчителів в межах вивчення змістової лінії «Геометричні перетворення площини».

На думку авторів подальша робота може бути привчена дидактичним аспектам вивчення гомотетичного повороту і гомотетичної симетрії та їх застосуванням для доведення геометричних тверджень. А подальше осмислення гомотетії, як методу доведення, може стати базою для формування евристичних стратегій учнів та розвитку математичної культури в освітньому середовищі.

Література

1. Антоненко М.І. *Розв'язування геометричних задач: книжка для вчителя*. Київ : Рад. шк., 1991. 128 с.
2. Баценко Т.М. Поворотна гомотетія // У світі математики. – 2015. – Т. 21, вип. 2. – С. 1–10.
3. Бондар Д.С., Воробйова С.І., Кадубовський О.А. Про одне важливе відношення в геометрії трикутника та суміжні питання // *Збірник наукових праць фізико-математичного факультету ДДПУ*. 2022. Вип. 12. С. 100–111.

4. Боровик В. Н., Зайченко І. В., Мурач М. М., Яковець В. П. *Геометричні перетворення площини: книга для студентів ВНЗ*. Ужгород : Університетська книга, 2003. 706 с.
5. Кушнір І.А. *Методи розв'язання задач з геометрії. Книга для вчителя*. К.: Абрис, 1994. 464 с.
6. Кушнір І. А. *Тріумф шкільної геометрії: навчальний посібник для 7–11 кл.* Київ : Наш час, 2005. 432 с.
7. Ленчук І. Г. Перетворення фігур : задачі на метод подібності // *Математика в рідній школі*. – 2016. – № 6. – С. 19–28.
8. Ленчук І.Г. Теоретико-методичні основи розв'язування задач методом подібності / І. Г. Ленчук // *Математика в рідній школі*. – 2016. – № 6. – С. 25–30.
9. Мартинюк О.В., Працьовитий М.В., Правіцка Н.С. Геометричні перетворення в математичній освіті школярів і майбутніх учителів математики / О.В. Мартинюк, М.В. Працьовитий, Н.С. Правіцка // *Актуальні проблеми фізики, математики, інформатики та методики їх навчання* : Всеукраїнська науково-практична конф., присвячена 90-річчю від дня народження канд. фіз.-мат. наук, проф. Горбачука Івана Тихоновича, 18–20 січня 2023 р., м. Київ : зб. матеріалів. – Київ : Вид-во УДУ імені Михайла Драгоманова, 2023. – С. 141–143.
10. Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С. *Геометрія: підручник для 9 кл. (поглиблене вивчення)*. Харків : Гімназія, 2021. 320 с.
11. Полонський В.Б., Рабинович Ю.М., Якір М.С. *Вчимося розв'язувати задачі з геометрії : навч.-метод. пос.* – Київ: Магістр-S, 1998. – 256 с.
12. Полонський В.Б., Якір М.С. Математичні експresi // *У світі математики*. – 2009. – Т. 15, № 1. – С. 71 – 81.
13. Прасолов В.В. *Задачі з планіметрії* / пер. з рос. А. Кравчука. Тернопіль : Навчальна книга – Богдан, 2012. 576 с.
14. Працьовитий М.В., Правіцка Н.С. Метод геометричних перетворень – один з основних методів елементарної геометрії / М.В. Працьовитий, Н.С. Правіцка // *Актуальні питання природничо-математичної освіти* : зб. наук. пр. / М-во освіти і науки України, Сумський держ. пед. ун-т імені А.С. Макаренка ; ред. рада: М.І. Бурда, Л.В. Кондрашова, М. Гарнер, В.Б. Мілушев та ін. – Суми : [СумДПУ імені А. С. Макаренка], 2024. – Вип. 1 (23). – С. 31–39. – DOI: 10.5281/zenodo.12190824.
15. Сарана О.А., Семенець С.П. *Нестандартні геометричні задачі: навчально-методичний посібник*. Житомир : Вид-во ЖДУ ім. І. Франка, 2007. 150 с.
16. Семенець С. П. Навчання учнів основної школи методам геометричних перетворень // *Математика в школі*. – 2007. – Вип. 1. – С. 17–20.
17. Семенович О. Ф. *Геометрія. Групи перетворень : навчальний посібник* / О. Ф. Семенович. – К. : Рад. школа, 1971. – 280 с.

18. Холомеєв Н. А., Кадубовський О. А. Про композицію гомотетій з різними центрами та суміжні питання // *Розвиток інтелектуальних умінь і творчих здібностей учнів та студентів у процесі навчання дисциплін природничо-математичного циклу «ІТМплюс–2024»* : Форум молодих дослідників» : матеріали V Всеукр. наук.-метод. інтернет-конф. студентів, аспірантів та молодих учених (29 листоп. 2024 р., м. Суми)*. Суми : СумДПУ ім. А. С. Макаренка, 2024. С. 79–82.
19. Чашечникова О.С. Методичні особливості навчання геометричних перетворень учнів з різними стилями мислення / О.С. Чашечникова // *Актуальні питання природничо-математичної освіти* : зб. наук. праць. – Суми : Сумський держ. пед. ун-т ім. А.С.Макаренка, 2023. – Вип. 1 (21). – С. 113–119. – DOI:10.5281/zenodo.8032560.
20. Шаригін І.Ф. *Геометрія для 21-го століття: книга для допитливих учнів та вдумливих учителів* / І.Ф. Шаригін; пер. з рос., упоряд. і заг. ред. В.О. Тадеєва. – Тернопіль: Навч. книга – Богдан, 2019. – 352 с.
21. Ясінський В.А. Задачі математичних олімпіад та методи їх розв'язування: навч. посіб. Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2012. 208 с.
22. Розв'язання задач // *У світі математики*. – 2009. – Т. 15, № 4. – С. 95.
23. Heydman, B. (1977). Homothety and notable points in the triangle. *Kvant*, (10), 48–49.
24. Spirov, A. (1998). Neozhidannaya povorotnaya gomotetiya. *Kvant*, (5), 41–44.

Nikita O. Kholomieiev, Oleksandr A. Kadubovskyi

Donbas State Pedagogical University, Sloviansk, Ukraine

Plane Homothety: Properties and Applications

The article presents an original approach to the logically structured generalization of the properties of plane homothety as one of the fundamental similarity transformations. Emphasis is placed on considering homothety not only as an object of study within the thematic unit "Geometric Transformations of the Plane" in the school geometry curriculum and the educational component "Elementary Geometry" in higher pedagogical education institutions but also as a method for proving geometric statements. Adhering to mathematical rigor, the key properties of homothety are systematically organized, its compositions with other fundamental plane transformations are examined, and the main invariants are identified. The didactic effectiveness of homothety in proving geometric propositions is demonstrated. Methodological challenges related to students' mastery of this topic in the school curriculum and prospects for its implementation in the training of future mathematics teachers are outlined.

Keywords: *homothety, geometric transformations of the plane, similarity of figures, invariants, proof method, geometry education, teacher training, didactics.*
